UNIVERSIDADE DE LISBOA

A Aprendizagem de Números Irracionais: Um Estudo com Alunos do 8º Ano

Tiago José Teixeira Borges

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques e coorientado pela Professora Doutora Maria Manuel Correia Torres

2018

UNIVERSIDADE DE LISBOA

A Aprendizagem de Números Irracionais: Um Estudo com Alunos do 8º Ano

Tiago José Teixeira Borges

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques e coorientado pela Professora Doutora Maria Manuel Correia Torres

2018

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Henriques, obrigado pela orientação, paciência, e disponibilidade, pelas críticas construtivas e pelo apoio desde o início até ao fim deste percurso. Obrigado!

À minha coorientadora, Professora Doutora Maria Manuel Torres, obrigado pelos seus conselhos, nomeadamente na elaboração da unidade de ensino, que ainda hoje recordo na preparação e no decorrer de uma aula. Obrigado!

Aos restantes professores do Instituto de Educação e da Faculdade de Ciências com quem eu trabalhei, obrigado pelos vossos ensinamentos. Obrigado!

Ao meu professor cooperante, Paulo Alvega, obrigado por me receberes, pelo apoio e pela confiança que depositaste em mim. Obrigado por todas as oportunidades para lecionar aulas e por todos os conselhos que me deste na minha preparação para professor. Sempre que preparo uma aula e sempre que estou a orientar uma aula, penso em tudo o que me ensinaste. Obrigado!

Aos alunos que eu acompanhei, obrigado por me receberem e pela vossa cooperação e interesse. A vossa contribuição para este estudo e para a minha formação de professor é inestimável. Obrigado!

À minha mãe, obrigado por todo o teu esforço, por todo o teu investimento e por toda a tua luta para que eu tivesse uma carreira e um futuro brilhante. Não me esqueço quando eu estava no 5º ano de escolaridade, procuraste que eu tivesse apoio escolar, não porque eu tinha dificuldades, mas porque eu não estava a fazer uso das minhas potencialidades. És um exemplo para qualquer pessoa na luta para uma vida melhor, não apenas para ela própria, mas principalmente para os filhos. Obrigado!

Ao meu pai, obrigado pelo teu zelo e apoio. Obrigado!

À minha irmã, Ana Rita, obrigado por me apoiares quando decidi optar por uma carreira no ensino. Obrigado!

À minha amiga Bly, obrigado por me teres dado a oportunidade de conhecer o mundo do ensino da Matemática, ao me escolheres para dar explicações na tua casa. Obrigado pelos teus conselhos, tanto a nível profissional como pessoal, e por toda a tua ajuda no que eu precisasse. Obrigado!

Aos meus explicandos, obrigado por me terem dado a oportunidade de vos acompanhar no vosso processo da aprendizagem da Matemática. Através do trabalho que desenvolvi convosco, consegui aprender muito sobre o ensino da Matemática no

Ensino Secundário. Esse trabalho foi um dos motivos que me incentivou a optar por uma carreira no ensino e, por isso, agradeço-vos muito. Obrigado pela vossa atenção e amizade. Obrigado!

Aos meus dois “irmãozinhos”, Tomás e Madalena Castelo, obrigado pelas oportunidades no vosso acompanhamento na aprendizagem da Matemática. Até este momento, são as únicas pessoas que eu assisti e, por vezes, acompanhei desde o 1º ciclo até ao Ensino Secundário. Para mim, são únicos e convosco aprendi muito. Obrigado pelo vosso apoio e atenção, assim como pelas nossas conversas e pelos muitos momentos de diversão. Obrigado!

À minha madrinha, Paula Pinto, obrigado pelo incentivo e atenção para que eu concluísse esta etapa, assim como no resto. Obrigado!

À minha prima Paula, obrigado pelo teu apoio e atenção, e aos meus primos Guilherme e André, obrigado por me deixarem acompanhar-vos na resolução de algumas tarefas de Matemática. Obrigado também pelos momentos de diversão e descontração. Obrigado!

Aos meus colegas e amigos do mestrado em Ensino da Matemática, obrigado pelas nossas conversas e pelos momentos que passámos juntos. Obrigado!

Aos restantes membros da minha família e amigos, obrigado pela vossa atenção e apoio. Obrigado!

Resumo

Este estudo foi realizado no âmbito da prática de ensino supervisionada e teve por base a lecionação de dez aulas de 50 minutos a uma turma do 8º ano de escolaridade da Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto no ano letivo 2016-2017, que abrangeu o tema "Dízimas infinitas não periódicas e números reais" do domínio Números e Operações (MEC, 2013).

O objetivo do estudo é compreender como os alunos se apropriam da noção de número irracional, como a utilizam e as dificuldades que manifestam quando resolvem tarefas que envolvem estes números. Sendo assim, procurei responder a quatro questões: (1) Como é que os alunos identificam números irracionais sob várias representações? (2) Como é que os alunos representam números irracionais na reta real? (3) Como é que os alunos operam com números irracionais? (4) Como é que os alunos comparam números irracionais sob várias representações?

Os resultados apresentados têm por base uma análise qualitativa dos dados recolhidos a partir da observação participante, apoiada em notas de campo e em gravações áudio e vídeo, bem como recolha documental, constituída pelas produções escritas dos alunos nas tarefas propostas ao longo da unidade de ensino e de minitestes. Os resultados obtidos sugerem que os alunos têm uma tendência para recorrer a representações alternativas de um número para classificá-lo quanto à irracionalidade: se o número está escrito na forma de fração, recorrem à sua representação decimal, e se consiste na raiz quadrada de um número natural, calculam a raiz desse número. Os alunos representam números irracionais na reta real recorrendo a um processo de construção geométrica, envolvendo o Teorema de Pitágoras e uma circunferência. Os alunos mobilizam conhecimentos que já possuem de regras operatórias envolvendo números racionais e aplicam-nos consoante o permitido com os números irracionais. Quando os números irracionais estão na forma de dízima, os alunos estabelecem relações de ordem entre eles comparando os algarismos das respetivas ordens, e quando estão na forma de raiz quadrada, comparam os radicandos. As dificuldades concetuais foram as mais difíceis de ultrapassar, e nalguns casos, mantiveram-se até ao final da intervenção letiva.

Palavras-chave: números irracionais; representações; operações com números irracionais; dificuldades dos alunos.

Abstract

This study was carried out as a supervised teaching practice and it was based on the teaching of ten lessons of 50 minutes to an 8^{th} grade class of the Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto during the school year of 2016-2017, covering the topic “Non-periodical infinite decimals and real numbers” of the curriculum unit Numbers and Operations (MEC, 2013).

The objective of this study was to understand how students learn the notion of irrational number, how they use it and the difficulties they reveal when solving tasks that involve these numbers. For that, I sought to answer four questions: (1) How do students identify irrational numbers in different representations? (2) How do students represent irrational numbers in the number line? (3) How do students operate with irrational numbers? (4) How do students compare irrational numbers in different representations?

The results presented are based on a qualitative analysis of the data collected from participant observation, supported on field notes and on video and audio recording of the classes, as well as the students’ written solutions of the tasks proposed during the teaching unit and the written assessment tests. The results suggest that the students tend to use alternative representations of a number to classify them according to their irrationality: when the number is a fraction, they turn to their decimal representation, and when it is a square root of a natural number, they calculate it using a calculator. The students represent irrational numbers in the number line through a process of geometrical construction, involving the Pythagorean Theorem and a circumference. The students mobilize their knowledge of calculating rational numbers and apply it to irrational numbers as possible. When the irrational numbers are in their decimal representations, students establish order relations between them by comparing the digits of the same orders, and when they are square roots of a natural number, they compare the radicands. The conceptual difficulties were the hardest to overcome, which in some cases, remained until the end of the teaching unit.

Keywords: irrational numbers; representations; operations with irrational numbers; students’ difficulties.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Anexos

Capítulo 1 – Introdução

Este estudo é desenvolvido no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática, foca-se na aprendizagem dos números irracionais e tem como base a intervenção letiva que realizei numa turma do 8º ano de escolaridade na Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto, em Queluz, no ano letivo 2016-2017.

Neste primeiro capítulo começo por apresentar as motivações que me levaram a realizar este estudo sobre a aprendizagem dos números irracionais por alunos do 8º ano e, depois, o seu objetivo principal e as suas questões orientadoras.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

Existe a crença de que a Matemática é a disciplina em que os alunos têm maiores dificuldades de aprendizagem, mas também é aquela que muitos pais dizem aos filhos que quanto mais souberem, mais empregos surgirão assim como grandes hipóteses de serem bons empregos. No meu caso, a Matemática sempre me cativou pelo seu conjunto definido de regras e procedimentos, mas também pelo seu caráter desafiante. Às vezes não se tratava de saber efetuar operações matemáticas, mas também de resolver problemas. A partir de uma certa idade consegui ver que a Matemática iria ter uma grande presença na minha vida profissional. Confesso que nunca pensei que isso significaria vir a ser professor de Matemática, mas eu suponho que isso se tornou claro quando a minha experiência e gosto em dar explicações foi aumentando gradualmente até me esclarecer o que eu queria fazer durante o resto da minha vida.

Escolhi então que queria ensinar Matemática. Mas uma coisa é ensinar, outra coisa é ser capaz de promover a aprendizagem dos alunos. Ensinar Matemática não se pode resumir à atividade do professor apresentar novos conhecimentos aos seus alunos e depois "assume-se que o aluno aprende ouvindo o que lhe é dito e fazendo exercícios" (Ponte, 2005, p.12), "ensinar bem Matemática é uma tarefa complexa, e não existem receitas fáceis para que todos os alunos aprendam ou todos os professores sejam, de facto, eficientes" (NCTM, 2007, p.21). Mas acredito que é possível potenciar essa eficiência e a minha formação para ser professor salientou isso o suficiente para me convencer a fazer um esforço para encontrar os meios para promover aprendizagens significativas no maior número possível de alunos. Para tal, é necessário ajudar os alunos, segundo o programa de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), a adquirirem os conhecimentos de factos e de procedimentos presentes na Matemática, a construírem e desenvolverem o raciocínio matemático, a saberem comunicar de forma adequada à Matemática, tanto oralmente como através da escrita, a resolverem problemas em diversos contextos e a verem a Matemática como um todo articulado e coerente.

Perante o programa de Matemática em vigor para o 8º ano de escolaridade e atendendo às condições favoráveis de realizar a intervenção letiva no 2º período letivo, estavam disponíveis os seguintes temas para eu lecionar: as dízimas finitas e infinitas periódicas e as dízimas infinitas não periódicas e números reais. Tendo em conta a existência de extenso número de estudos, tanto a nível nacional como internacional, feitos em torno do primeiro tema (por exemplo, Ponte & Quaresma, 2014; Hurst & Cordes, 2016), o segundo cativou-me mais exatamente pelo oposto. Ao efetuar uma pesquisa em torno do número irracional, desde os meus apontamentos de quando frequentei o 9º ano de escolaridade até aos artigos acerca da lecionação dos números irracionais, descobri que o número de tópicos relacionados com os números irracionais lecionados atualmente era superior, que a lecionação do número irracional não se restringe apenas à sua noção e de haver poucos estudos acerca desta matéria em torno de alunos do Ensino Básico. Segundo Tall (2013), citado em Kidron (2018), a mudança dos números racionais para os números reais torna-se crítica para muitos alunos, pois a lecionação da noção de número irracional nem sempre a clarifica. Tendo em conta a presença do número irracional nos conteúdos programáticos da Matemática nos últimos anos do ensino básico, do ensino secundário e do ensino universitário, percebe-se a importância da sua noção ser lecionada de forma que os alunos a aprendam com compreensão. Como pode então o professor ajudar os seus alunos a desenvolverem a noção de número irracional? Um processo adotado por alguns alunos é a sua memorização sem necessariamente os compreenderem, levando-os a enfrentarem dificuldades sobre quando e como usar o conceito, revelando uma aprendizagem bastante frágil, segundo Bransford, Brown & Cocking (1999, citados em NCTM, 2007). Torna-se então fulcral que os alunos aprendam a noção de número irracional com compreensão, pois é aprendendo Matemática com compreensão que permitirá facilitar a aprendizagem subsequente (NCTM, 2007).

Ao aprenderem a noção de número irracional, os alunos descobrem um novo universo de números, os números reais, e para o compreenderem, o professor deve procurar criar um ambiente na sala de aula para concretizar essa compreensão. Uma das prioridades para o professor deve ser a promoção do desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Os professores possuem os meios de encorajar os alunos a questionar, a formular e justificar conjeturas, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções, sendo responsáveis pela criação de um ambiente intelectual no qual o raciocínio matemático constitui a norma (NCTM, 2007).

Tal como na aprendizagem de qualquer tópico matemático, a comunicação, como "transmissão e partilha de informações, conhecimentos e ideias, sustentada no conhecimento e nas formas de circulação desse conhecimento" (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014, p.2), possui um papel importante numa sala de aula onde se pretende promover a aprendizagem da Matemática com compreensão, e a da noção de número irracional não é exceção. A reflexão acerca do papel de comunicação no processo de ensino-aprendizagem dos números irracionais e de forma que este tópico matemático seja aprendido com compreensão, torna-se assim necessária.

No atual debate sobre a forma de um professor conduzir uma aula que leve os alunos a aprenderem Matemática com compreensão, eventualmente chega-se à discussão do tipo de tarefas a propor aos alunos. Segundo dados do *Matemática 21*, apresentados por Ponte e Serrazina (2004), um inquérito feito aos professores, revelaram que 91% dos docentes do 3º ciclo utilizam os exercícios sempre ou em muitas aulas, enquanto outras tarefas não possuem este protagonismo: os problemas aparecem em segundo lugar (77%), seguidos das atividades de exploração (12%) e terminando com os projetos (2%). Ponte e Serrazina (2004) destacam, no entanto, que apesar de os exercícios ainda deterem um papel dominante na sala de aula, os professores usam de modo significativo outras tarefas. Canavarro (2011) defende que um dos desafios para o professor desenvolver o ensino exploratório é "escolher criteriosamente tarefas matemáticas valiosas com potencial para proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas sofisticadas" (p. 115). Considerando que a tarefa se torna no centro da aula, pois tem que ser planeada pelo professor, resolvida pelos alunos e discutida pelo professor e pelos alunos em conjunto, a escolha do tipo de tarefas a implementar na intervenção letiva para a aprendizagem dos números irracionais torna-se num objeto de reflexão.

Tendo em conta que "os alunos aprendem Matemática através das experiências que os professores proporcionam" (NCTM, 2007, p.21), apercebo-me do quão é importante refletir sobre a forma como devo planear e conduzir as aulas. Perante as contribuições em ajudar os alunos a construir e a desenvolver o raciocínio matemático e em investir na comunicação oral entre os alunos, através de tarefas abertas e desafiantes, pretendi apostar num método de ensino exploratório que permitisse aos alunos aprenderem Matemática com compreensão e a mim a desenvolver práticas letivas efetivas para a aprendizagem da Matemática.

A lecionação de um novo tipo de número implica novas representações de números e, consequentemente, novas aprendizagens em operar, comparar e representar números na reta real. E com novos tópicos matemáticos para aprender surgem novas dificuldades por parte dos alunos, que eu pretendo analisar e também compreender neste estudo.

Até ao ano de 2013, a lecionação das dízimas infinitas não periódicas e números reais em Portugal era feita no 9º ano de escolaridade, mas com o novo programa passou para o 8º ano. Nobre e Druck (2015) realçam a sua preocupação na lecionação dos números irracionais a um público entre os 13 e 14 anos: referem as transformações "corporais, de maturidade, de visão de mundo" (p.2) de um grupo etário como este e os seus diversos pensamentos como fatores detrativos para que eles atinjam uma ótima aprendizagem dos números irracionais.

Com a intervenção letiva e com este estudo disponho assim de uma oportunidade para refletir sobre o modo de abordar a temática dos números irracionais com os alunos, nomeadamente o tipo de tarefas a propor nas aulas e a forma de as conduzir, constituindo assim um contributo para a minha formação para professor. Observando que esta unidade de ensino, no programa de Matemática atual, passou a ser introduzida em turmas com alunos mais novos do que os do programa anterior, a lecionação deste tema torna-se assim mais desafiante, se o objetivo for ser aprendido com compreensão.

1.2. Objetivo e questões de investigação

Atendendo ao que foi exposto, proponho-me assim a traçar como objetivo principal deste estudo compreender como os alunos do 8º ano de escolaridade se apropriam da noção de número irracional e como a utilizam, e que dificuldades manifestam na resolução de tarefas que envolvem estes números.

Para tal, pretendo realizar este estudo segundo as seguintes questões orientadoras:

a) Como é que os alunos identificam números irracionais em várias representações?

b) Como é que os alunos representam números irracionais na reta real?

c) Como é que os alunos operam com números irracionais?

d) Como é que os alunos comparam números irracionais sob várias representações?

Capítulo 2 – Enquadramento Curricular e Didático

Neste capítulo é apresentado um enquadramento teórico acerca da problemática da aprendizagem dos números irracionais, abordando os seguintes tópicos: a identificação da irracionalidade de um número em várias representações, a representação de números irracionais na reta real, as operações com números irracionais e a comparação de números irracionais sob diferentes representações. Este enquadramento é feito com base em orientações curriculares e didáticas, tanto nacionais como internacionais, assim como em trabalhos de investigação que abordam este tema ao nível das metodologias adotadas para o seu ensino e das dificuldades que os alunos evidenciam na aprendizagem destes números.

2.1. Irracionalidade de um número

2.1.1. Número irracional e suas representações

O Programa de Matemática do Ensino Básico em vigor (MEC, 2013) estabelece objetivos para a lecionação da noção, das regras operatórias e das relações de ordem de diferentes tipos de número (inteiro, decimal, fracionário, racional) na sala de aula: no 1º ciclo os alunos começam por estudar os números naturais e as suas operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) e são introduzidas as frações; no 2º ciclo os alunos aprendem a operar (adição e subtração) e a comparar números racionais não negativos e também a potenciação; no 7º ano de escolaridade, o foco é na multiplicação e na divisão de números racionais, na noção de inverso do número, e na raiz quadrada e cúbica de números.

Um número diz-se racional se pode ser escrito num quociente de dois números inteiros (Magro, Fidalgo & Louçano, 2016). No 8º ano de escolaridade os alunos são novamente confrontados com a noção de número racional e aprendem a escrever uma dízima finita ou infinita periódica em forma de fração. Segundo as metas curriculares definidas no programa de Matemática (MEC, 2013), os alunos devem reconhecer que uma fração cujo denominador é uma potência de 2 ou uma potência de 5 ou um produto de potências de 2 e de 5 corresponde a uma dízima finita. E que, em caso contrário, essa fração corresponde a uma dízima infinita periódica.

A lecionação da noção de número irracional pode ser assim feita a partir da de número racional: se um número não é racional, então é irracional (Horner, Halliday, Blyth, Adams & Wheaton, 2010), ou seja, não pode ser escrito num quociente de dois números inteiros. Se um número irracional não pode ser escrito na forma de fração, então não é representado por uma dízima finita, nem por uma dízima infinita periódica, mas sim por uma dízima "com um infinito número de casas decimais sem nunca adotarem um padrão de repetição" (Horner, Halliday, Blyth, Adams & Wheaton, 2010, p. 19), ou seja, uma dízima infinita não periódica. Um número irracional também pode ser representado pela raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito (MEC, 2013).

Os alunos são assim confrontados com dois tipos de representação para o número irracional, e nos últimos anos, alguns autores refletiram sobre o papel das representações na aprendizagem da Matemática. Segundo Duval (2012), "as representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática" (p.268), pois é através delas que, por vezes, é possível aceder ao objeto matemático. Duval (2006) apresenta dois tipos de transformações de representações semióticas: tratamentos e conversões. O autor define tratamentos como "transformações das representações que acontecem dentro do mesmo registo" (p.111), e conversões como "transformações das representações que consistem em mudar um registo sem alterar o objeto matemático" (p.112). Por exemplo, escrever o número $\frac{2}{4}$ como $\frac{1}{2}$ consiste num tratamento, pois ambos os números são frações, mas se escrevermos $\frac{1}{2}$ como 0,5, estamos perante uma conversão pois o primeiro número, que estava escrito na forma de fração, passou a estar escrito na forma de dízima.

O tipo de representação que um número real assume pode assim influenciar o procedimento para descobrir se é racional ou irracional. Zazkis e Sirotic (2010), no seu estudo de um grupo de professores de Matemática em formação, refere a tendência dos elementos do seu grupo de testar a irracionalidade de um número com base na sua representação decimal em vez da de fração. Zazkis e Sirotic (2010) observam também a tendência dos professores em depender da calculadora. De forma semelhante, Malacka (2014) aponta para a tendência dos alunos do ensino secundário em basear-se na calculadora para classificar números quanto à sua irracionalidade. Consideremos o caso de $\sqrt{2}$: se recorrermos à calculadora, verifica-se que $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ ..., mas o que a calculadora apresenta é uma aproximação de $\sqrt{2}$, mas caso o aluno não saiba isso corre o risco de interpretar o resultado como $\sqrt{2} = 1{,}414213562$. O aluno pode assim concluir incorretamente que $\sqrt{2}$ é uma dízima finita e, consequentemente, um número racional. O aluno é assim confrontado com diferentes representações de um número para o classificar quanto à sua irracionalidade, dando origem à questão de qual a melhor para efetuar a classificação? Duval (2006) questiona como um aluno pode discriminar o que é relevante e o que não é, na representação semiótica de um objeto e aponta que "a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade na compreensão da Matemática" (Duval, 2012, p.276). Essas dificuldades podem, de facto, dever-se à alteração do significado que um objeto matemático por ser submetido a transformações de representação semiótica (D'Amore, 2007), mas

> para entender como trabalhamos em matemática para resolver problemas e até mesmo para saber como utilizar um conhecimento matemático para resolver problemas reais, é preciso primeiro tomar consciência das transformações de representações semióticas, por meio de mudança de registros e pelos tratamentos específicos de cada registro (Freitas e Rezende, 2013, pp.26-27).

Exemplificando as dificuldades suscitadas por transformações de representações semióticas, considera-se o estudo de Bartolomeu (2010) acerca de um grupo 54 alunos que frequentam os três primeiros anos do ensino médio (equivalente ao ensino secundário em Portugal), 18 cada, em que o autor apresenta uma questão de escolha múltipla para que os alunos identifiquem a dízima infinita periódica, quando numa das alternativas se encontrava um número na forma de dízima finita e os restantes três estavam representados na forma de fração, em que dois representavam dízimas finitas e o terceiro uma dízima infinita periódica. O autor apurou que dos alunos do 1º, 2º e 3º ano do ensino médio, 0%, 11,1% e 16,7%, respetivamente, escolheram a opção correta, e conclui que estes valores se devem à falta de importância atribuída à lecionação das diferentes representações de números racionais. Bartolomeu (2010) também notou que metade dos alunos de cada ano afirmou que o número representado por uma dízima finita era uma dízima infinita periódica e defendeu a existência de dificuldades dos alunos na representação decimal de uma dízima infinita periódica. Os dados recolhidos por Bartolomeu (2010) sugerem que os alunos desconhecem quando um número representado na forma de fração ou na de dízima representa uma dízima infinita não periódica, também desconhecimento da noção de dízima finita. Verificamos assim a existência de eventuais dificuldades por parte dos alunos em saberem os tipos de dízimas que um número real pode estar representado e a tendência, tanto de alunos, como de professores, em recorrerem à representação decimal para testar a irracionalidade de um número (Zazkis & Sirotic, 2010; Malacka, 2014). E perante estas observações, podemos atribuir assim os seguintes desafios para o professor na lecionação da noção de número irracional aos seus alunos: os tipos de dízimas que um número real pode assumir, o tipo de dízima que um número racional ou irracional pode assumir, e como a calculadora se pode tornar numa ferramenta útil ou obsoleta na identificação do tipo de dízima de um número real.

Uma dízima infinita não periódica representa um número irracional, mas nem todo o número irracional se representa na forma de dízima, como é o caso dos números π e $\sqrt{2}$. Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), os alunos são confrontados com o número π no 6º ano de escolaridade como a grandeza de proporcionalidade entre o perímetro e o diâmetro de um círculo e é-lhes apresentado um valor arredondado, não havendo uma referência específica à sua natureza, até que no 8º ano os alunos saber deverão reconhecer que π é um número irracional. Numa das metas curriculares traçadas no programa, pretende-se que os alunos reconheçam que o número $\sqrt{2}$ é irracional e que a raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito é também irracional. Como explicado atrás, a calculadora pode não ser um instrumento eficaz na explicação por que a raiz quadrada de um número natural é um número irracional. No entanto, vários autores (Zazkis e Sirotic, 2004, 2010; Barbosa, 2013; Malacka, 2014) apontam a tendência de alunos e professores em testarem a irracionalidade de um número com base na sua representação decimal e recorrerem à calculadora para tal. Reforça-se assim a ideia de Duval (2013), em que é necessário ter consciência de cada transformação de representações semióticas que fazemos ao objeto matemático para saber usar a Matemática. No seu estudo com um grupo de alunos do 9º ano, Barbosa (2013) admite a hipótese de "a representação dos números sob a forma de um radical constitui um obstáculo na classificação dos números reais como racionais ou irracionais" (p.98). Segundo as metas curriculares do programa de Matemática do Ensino Básico (2013), os alunos têm de saber que $\sqrt{n}$ é um número irracional se n não for um quadrado perfeito, permitindo assim testar a irracionalidade de um número na forma de raiz quadrada sem recorrer obrigatoriamente à sua representação decimal. Pode tornar-se vantajoso para os alunos não recorrerem à representação decimal para testar a irracionalidade de um número, visto que Sirotic e Zazkis (2007) acreditam que atribuindo “ênfase na representação decimal de números irracionais, seja explícita ou implícita, não contribui para a compreensão concetual de irracionalidade” (p. 487). Não são apenas as raízes de índice 2 de números naturais que podem constituir números irracionais, mas também as de índice superior. No entanto, perante as orientações do programa (MEC, 2013), assim como as do manual Pi do 8º Ano adotado pela Escola (Magro, Fidalgo, & Louçano, 2016), neste nível de ensino serão apenas abordadas as raízes quadradas.

2.1.2. Conjuntos numéricos

Uma estratégia que também se pode utilizar para classificar um número quanto à sua irracionalidade é identificando o conjunto numérico a que pertence. Sabendo que todo o número que pertence ao conjunto $\mathbb{Q}$ (e assim também aos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$) é racional, mas que nem todo o número que pertence a $\mathbb{R}$ é racional, o aluno pode assim concluir que esse número que pertence $\mathbb{R}$, mas não a $\mathbb{Q}$, então é irracional. Torna-se assim necessário que os alunos saibam, como previsto no Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), definir o conjunto dos números reais como a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Rezende e Nogueira (2009) efetuaram um estudo acerca dos temas de Matemática mais difíceis de lecionar no Brasil que foram discutidos em seminários, em que num uma professora de uma disciplina do 4.º ano do curso da licenciatura de Matemática da Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão, relatou que quase a totalidade dos alunos não soube relacionar os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ por meio de um diagrama. Pietropaolo, Corbo e Campos (2013) também mencionam como, no seu estudo, professores de Matemática da rede pública de São Paulo “deixam margem a interpretações incorretas” (p.4) na representação das relações dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ por meio de um diagrama de Venn. Estes autores destacam um professor que, apesar de ter definido corretamente o conjunto dos números reais, “desenhou um diagrama que poderia levar um aluno a imaginar que existem outros números reais que não são racionais, nem irracionais” (p.4).

2.2. Representação de raízes quadradas na reta real

O percurso histórico dos números irracionais não se limita apenas ao domínio dos números ou ao domínio algébrico. Para se falar acerca da origem do número irracional, é necessário recuar até ao matemático Pitágoras e falar da “crise provocada pela descoberta e posterior revelação de grandezas geométricas cujas razões não podiam ser representadas por números inteiros" (Melo, 1999, p.28). Considerando que o número irracional surgiu por meio de um problema geométrico é evidente a extensão deste tipo de número à Geometria. E a discussão da relação entre as dificuldades dos alunos na compreensão dos números irracionais e a Geometria também já tomou lugar no debate da educação matemática. Segundo Arcavi, Bruckheimer e Ben-Zvi (1987), a relação dos números irracionais com a Geometria pode fornecer uma melhor compreensão da noção de número irracional, mas também ideias de como introduzir os números irracionais na sala de aula. Uma das propostas curriculares para o ensino da Matemática, em muitos países, é uma abordagem de métodos para determinar a localização de números irracionais na reta real. Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), os alunos deverão ser capazes de representar radicais de números naturais na reta real e de utilizar o Teorema de Pitágoras para os construir geometricamente.

Mas como pode o aluno proceder na construção geométrica de um número irracional na reta real? Os pitagóricos foram responsáveis pela descoberta do primeiro número irracional, a raiz quadrada de 2, na tentativa de descobrir o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, ganhando um papel num processo de construção geométrica para representar raízes quadradas de números naturais na reta real (Gardner, 1997). Este processo inclui os seguintes passos:

1) Aplicar o Teorema de Pitágoras: determinar dois quadrados perfeitos cuja soma equivale ao quadrado da hipotenusa;

2) Construir o triângulo retângulo cujos comprimentos correspondem às raízes quadradas dos quadrados perfeitos determinados no passo anterior;

3) Traçar o arco de circunferência desde o vértice de interseção da hipotenusa e da altura do triângulo até à reta real.

Para Sirotic e Zazkis (2007), a representação geométrica do número irracional constitui um processo acessível para o aluno (desde que conheçam o Teorema de Pitágoras), que o pode ajudar a interiorizar o conceito de irracionalidade e "revelar a ideia de que a cada número corresponde um (único) ponto na reta numérica" (p.488). Seguindo este processo são visíveis os desafios dos alunos quando lhes é pedido para localizar na reta real a raiz quadrada de um número natural: os alunos têm que explorar o conjunto dos números naturais e encontrar dois números tal que a soma dos seus quadrados equivale o quadrado do número irracional que pretendem representar na reta. Oliveira e Fiorentini, citados por Barbosa (2013), defendem que os alunos apenas conseguirão localizar números irracionais na forma de raiz quadrada na reta real se souberem relacionar o Teorema de Pitágoras com o processo de construção geométrica e aplicá-lo corretamente. Depois de os alunos fazerem a construção do triângulo retângulo devem traçar o arco de circunferência, mas também compreender o seu papel.

No seu estudo, Sirotic e Zazkis (2007) exploram o grau de compreensão de números irracionais de um grupo de 46 professores de ensino secundário em formação, focando a representação de números irracionais como pontos da reta real, pedindo-lhes que obtenham a localização exata da raiz quadrada de 5 na reta real. Os autores apuraram que dos 46 professores apenas 10 utilizaram uma abordagem geométrica para localizar raiz quadrada de 5 na reta real, em que 9 respostas foram classificadas como corretas, e se recorreu ao Teorema de Pitágoras. No entanto algumas das respostas diferenciavam-se pois não tinham sido construídos triângulos iguais e também houve o caso de um professor que recorreu à espiral de triângulos retângulos construída por sucessivas aplicações do Teorema de Pitágoras em que um tinha um dos seus catetos iguais a 1 e o seguinte com a hipotenusa do triângulo anterior. Os autores consideram que "esta construção (…) é uma versão mais generalizada da abordagem geométrica convencional (…). Pode não ser a construção mais eficiente, mas dispensa a pessoa de pensar em dois quadrados perfeitos cuja soma seja equivalente ao quadrado do comprimento da hipotenusa necessária" (p. 480). No entanto houve 18 professores que apresentaram uma localização aproximada da raiz quadrada de 5 e, nalguns casos, foi utilizada a calculadora para obter essa aproximação. Os autores referem que alguns destes professores argumentaram que era impossível obter a localização exata da raiz quadrada de 5, mas apenas uma aproximação, refutando a existência de uma reta real e defendendo a de uma "reta racional". Tendo em conta que 39,2% dos futuros professores recorreram à aproximação decimal da raiz quadrada de 5 para a sua localização na reta real, estes autores concluem que uma ênfase na representação decimal de números irracionais não contribui para a compreensão conceptual da irracionalidade de um número e defendem que a representação geométrica de número irracional: (i) poderá ser uma ferramenta mais poderosa e indispensável na aprendizagem da noção de irracionalidade de um número; (ii) será mais acessível ao aluno a ideia de que a cada número irracional corresponde um (único) ponto na reta real e; (iii) os alunos ficarão mais sensíveis à distinção entre número irracional e a sua aproximação racional.

Sirotic e Zazkis (2007) também referem que o processo de construção geométrica de um número irracional possui os seus desafios, mas a sua abordagem na lecionação da irracionalidade de um número pode ser mais vantajosa para os alunos. Barbosa (2013) verifica que alguns dos alunos visados no seu estudo evidenciam algumas dificuldades em relacionar a construção de um triângulo retângulo e com a representação de uma raiz quadrada de um número natural na reta real, mas a maioria soube aplicar de forma correta o Teorema de Pitágoras. No seu estudo com o objetivo de investigar o conceito de números irracionais e a sua história junto de 178 alunos dos três primeiros períodos das áreas de ciências exatas das quatro universidades de Pernambuco (cursos de Engenharia, Engenharia e Ciências da Computação, Bacharelado em Informática e Licenciatura de Matemática), Melo (1999) utilizou um questionário, no qual incluiu as duas questões abaixo:

(A) Para todo o ponto do eixo numérico há um número racional correspondente.
(B) Para todo o número irracional há um ponto correspondente no eixo numérico.

A percentagem de respostas corretas à questão (A) variou entre 30,1% e 47%, enquanto as da questão (B) variou entre 36% e 51%, revelando dificuldades por parte destes alunos acerca da representação de um número irracional na reta real. Com base nestes resultados, Melo (1999) defende que "o aluno torna-se incapaz de atribuir um significado aos conteúdos matemáticos, restringindo seu conhecimento ao aspeto operacional" (p. 34) e que o recurso a atividades que de caráter histórico, entre eles a relação entre o lado e a diagonal do quadrado, e a determinação da raiz quadrada por meio de triângulos podem contribuir para uma melhor compreensão da irracionalidade, reforçando a conclusão também defendida por Sirotic e Zazkis (2007).

2.3. Operações algébricas com raízes quadradas

A aprendizagem dos números e das suas operações é evolutiva. No Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), traçou-se como meta para os alunos do 8º ano de escolaridade:

> saber que as quatro operações definidas sobre os números racionais, a potenciação de expoente inteiro e a raiz cúbica se podem estender aos reais, assim como a raiz quadrada a todos os reais não negativos, preservando as respetivas propriedades algébricas, assim como as propriedades envolvendo proporções entre medidas de segmentos (p.61).

No seu estudo acerca de ideias erradamente concebidas e de dificuldades de aprendizagem reveladas por alunos do 9º ano de escolaridade durante a lecionação de radicais, Ozkan e Ozkan (2012) defendem um método de ensino-aprendizagem centrado no aluno em vez do professor, em que "em vez de explicar as fórmulas e as relações aos alunos, nós devemos fazer com que eles aprendam sozinhos" (p.6). Em relação à aprendizagem das operações com radicais, os autores defendem igualmente que se deve investir tempo suficiente nelas de modo que não cometam erros nenhuns no futuro, que não sejam explicadas de forma superficial aos alunos e sejam estudadas detalhadamente. Erlandson (2013) analisa os conhecimentos acerca de radicais de 49 estudantes universitários que tenham frequentado ou concluído uma disciplina de Cálculo e defende um método de ensino exploratório para a aprendizagem das propriedades algébricas de radicais. No seu estudo acerca de ideias erradamente concebidas sobre radicais a alunos do 9º ano de escolaridade, Ozkan (2011) procura investigar quais os erros que os alunos cometem na aprendizagem de algumas das propriedades algébricas dos radicais e sugere métodos específicos para a sua lecionação. Na adição e na subtração de raízes quadradas de números naturais, o autor defende o uso de exemplos simples para os alunos compreenderem que não se pode somar nem subtrair raízes quadradas se não tiverem o mesmo radicando. Em relação à multiplicação e à divisão de raízes quadradas, Erlandson (2013) sugere que sejam os alunos "a descobrirem as regras para multiplicar e dividir radicais em vez de apresentá-las formalmente" (p.51), e defende que os alunos explorem exemplos simples a fim de as conjeturarem sozinhos e que desta forma os ajudará a recordá-las.

Jover (2013) aponta as dificuldades dos alunos do 8º ano de escolaridade em subtrair números irracionais, destacando o exemplo da raiz quadrada de 2 menos ela própria e que os alunos não conseguiram concluir que a resposta era zero, apesar de terem mostrado saber fazê-lo com números inteiros. Na sua tese, Costa (2009) analisa os conhecimentos que 20 alunos do 8º ano de escolaridade possuem acerca dos números irracionais. Em relação às operações com números irracionais, esta autora considera os seguintes dados em que os alunos tinham de completar afirmações com $=$ ou $\neq$ de modo a torná-las verdadeiras, que permitem refletir acerca de algumas das dificuldades dos alunos:

Afirmação		Correta	Incorreta	Não Respondeu
(1)	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ___ $\sqrt{5}$	2	16	2
(2)	$\sqrt{3}+\sqrt{3}$ ___ $\sqrt{6}$	3	11	6
(3)	$\sqrt{10}-\sqrt{5}$ ___ $\sqrt{5}$	6	12	2
(4)	$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ ___ $\sqrt{6}$	14	4	2
(5)	$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ ___ 3	6	11	3
(6)	$\sqrt{8}\div\sqrt{2}$ ___ 2	8	6	6
(7)	$\sqrt{3^2}$ ___ 3	9	8	3

Dos resultados dos alunos ao completarem as afirmações Costa (2009) conclui que os alunos acreditam que $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a\pm b}$. Os dados recolhidos e a conclusão apresentada pela autora evidenciam dificuldades por parte dos alunos em somar e subtrair raízes quadradas, e Ozkan (2011), sugere que a existência deste tipo de dificuldade pode dever-se ao aluno acreditar na existência da propriedade distributiva da raiz quadrada em relação à adição e subtração. Observando os dados da afirmação (4) e (6), Costa (2009) conclui que a maior parte dos alunos multiplica de forma correta raízes quadradas, mas o mesmo não se aplica à divisão pelo resultado não estar representado na forma de raiz quadrada. Apesar de a maior parte dos alunos ter respondido corretamente à afirmação (4), não é possível saber se os alunos efetuam porque têm conhecimento de que está certo ou por seguirem a metodologia que aplicam quando operam com números racionais. No caso da operação descrita em (5), Costa (2009) argumenta que maior parte dos alunos não respondeu corretamente por acreditarem que a multiplicação de duas raízes quadradas não pode ser equivalente a um número que não é uma raiz quadrada. Em relação à igualdade (7), Costa (2009) justifica os resultados argumentando que os alunos não conhecem o significado da raiz quadrada.

Ao questionarem um grupo de professores de ensino secundário em formação sobre a soma de dois números irracionais ser igual a um número irracional, Sirotic e Zazkis (2006) destacam a explicação de um professor que classificou a afirmação como falsa: a soma de dois números irracionais é um número irracional e exemplificou com a soma da raiz quadrada de 2 com a raiz quadrada de 3. No entanto sabe-se que a soma de dois números irracionais e simétricos é igual a um número racional. Nesse mesmo estudo um professor argumentou que como os números irracionais são dízimas infinitas não periódicas, portanto continuam indefinidamente não é possível somá-los. Sirotic e Zazkis (2006) apontam que uma das dificuldades de alguns dos professores que erraram foi a conceção que fizeram de número irracional, argumentando que os professores recorrem à noção de número irracional como dízima infinita. Esta explicação também foi utilizada por alguns professores para justificar a impossibilidade de se multiplicarem números irracionais. Em Sirotic e Zazkis (2006) uma professora também argumenta que não é possível multiplicar números que não se podem escrever na forma de fração.

2.4. Comparação de números irracionais

A comparação de números dispõe de uma posição de destaque em discussões em educação matemática e a sua lecionação inicia-se no mesmo momento que a noção de número e as operações com números. No Programa de Matemática do Ensino Básico (2013), são traçadas metas curriculares envolvendo as relações de ordem antes da lecionação dos números irracionais: no 1º ciclo, os alunos deverão ser capazes de comparar números naturais utilizando os símbolos > e <, ao dividirem um segmento de reta em partes, os alunos deverão ser capazes de definir essas partes em forma de fração e, ainda, ser capazes de comparar frações com o mesmo numerador ou com o mesmo denominador. No 2º ciclo, os alunos deverão saber ordenar duas quaisquer frações e representar e comparar números racionais positivos, negativos, e com o número 0 (zero). No 3º ciclo os alunos estabelecem relações de ordem entre dois números racionais positivos e os seus quadrados e cubos, e ordenam números racionais representados por dízimas finitas ou infinitas periódicas já no 8º ano de escolaridade.

Ainda no âmbito deste programa, acerca dos números irracionais, espera-se que os alunos sejam capazes de estender aos números reais a ordem estabelecida para os números racionais utilizando a representação na reta numérica, reconhecendo assim as propriedades transitiva e tricotómica da relação de ordem e também ordenar dois números reais representados na forma de dízima comparando sequencialmente os algarismos da maior para a menor ordem.

Na análise do desempenho de um grupo de 48 alunos que frequentam o 3º ao 6º ano de escolaridade, no seu estudo que focava o conhecimento e a compreensão de números na forma de dízima finita, Roche (2005) identifica o uso de duas estratégias:

1) O uso de linguagem fracionária: por exemplo, 0,567 é maior que 0,3 porque 5 décimos é maior que 3 décimos.

2) Acrescentar zeros no número na forma de dízima finita com a parte decimal com menos números: por exemplo, 0,37 é maior que 0,217 porque 370 é maior que 217.

Na análise do desempenho de um grupo de alunos do 5º ano de escolaridade na avaliação diagnóstica (antes da lecionação da unidade de ensino) relativamente à comparação de números em forma de dízima finita, Quaresma (2010) destaca a estratégia de uma aluna que vai acrescentando zeros à direita dos números para que fiquem todos com o mesmo número de casas decimais e depois efetua a comparação, uma das estratégias também observadas por Roche (2005) nos seus alunos.

Na inclusão de dízimas infinitas periódicas ou não periódicas no procedimento de comparação, surgem depois as questões da eficácia das estratégias referidas e de possíveis dificuldades por parte dos alunos. Na sua tese, Bartolomeu (2010) apresenta uma questão de escolha múltipla em que o aluno tem de selecionar a resposta que contém quatro números situados entre 1 e 2,9, das quais as respostas se apresentam a seguir:

a) $1{,}1\,;\,2{,}11\,;\,2{,}232425\ldots\,;\,\pi$
b) $1{,}9\,;\,2{,}11\,;\,2{,}232425\ldots\,;\,2{,}2932425\ldots$
c) $1{,}27\,;\,2\,;\,2{,}(27)\,;\,3{,}14$
d) $2{,}5\,;\,2{,}555\,;\,2{,}909009000\ldots\,;\,\sqrt{5}$

Na análise de dados, Bartolomeu (2010) verificou que dos 18 alunos de cada um dos três anos que participaram no estudo, as percentagens dos alunos que selecionaram a alternativa correta foram de 33,3%, 61,1% e 72,2%, no 1º, 2º e 3º ano, respetivamente. Estes números evidenciam algumas dificuldades por parte dos alunos e que podem ser explicadas pela apresentação de números irracionais sob diferentes representações. No seu estudo, Bartolomeu (2010) apurou que apenas um aluno de cada ano selecionou a resposta a), evidenciando que a maior parte dos alunos sabia o valor de π. O autor destaca ainda a reduzida percentagem de alunos do 1º ano que responderam corretamente à questão, e que a maioria dos alunos selecionou a alínea d) como resposta errada. Apesar de não ser apresentada uma justificação, esta escolha por parte dos alunos pode ter uma explicação semelhante à que Quaresma (2010) apresentou: que os alunos têm dificuldades em comparar números decimais quando têm diferentes quantidades de casas decimais. Bartolomeu (2010) destacou a resposta de um aluno do 2º ano que apresentou a alternativa correta através da exclusão das opções incorretas: o aluno excluiu as respostas a), c) e d) por conterem os números π, 3,14 e 2,909009000… respetivamente. Esta escolha apresenta evidências de que o aluno sabe o valor de π e comparar uma dízima finita com uma dízima infinita não periódica.

A comparação de números irracionais não se cinge apenas a números representados em forma de dízima, mas também na forma de raízes quadradas de números naturais. Um dos métodos para os alunos compararem as raízes quadradas de números naturais pode ser através de processos de transformação de representações semióticas: se o radicando for um quadrado perfeito, a raiz quadrada do número natural converter-se-á num número natural, mas caso contrário será representada por uma dízima infinita não periódica. Este processo consiste assim no cálculo de raízes quadradas cuja lecionação está prevista para o 7º ano de escolaridade, para quadrados perfeitos, segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013. O cálculo das raízes quadradas de números naturais pode revelar-se um desafio para os alunos ao ponto de recorrerem à calculadora. Foram referidos estudos (Zazkis e Sirotic, 2004, 2010; Barbosa, 2013; Malacka, 2014) em que os alunos recorrem à calculadora para representar em forma de dízima números irracionais com o objetivo de os classificar quanto à sua natureza. Não se deve descartar a hipótese de eles fazerem o mesmo para estabelecerem relações entre eles. No seu estudo, Barbosa (2013) apresenta os resultados dos alunos numa prova de avaliação em que eles tinham de apresentar três números irracionais entre – 2 e 1. Apesar de 12 dos 16 alunos que realizaram a prova não terem apresentado uma resposta ou apresentaram uma resposta incorreta, todos os que receberam a cotação total da questão recorreram a raízes quadradas de números naturais ou de dízimas finitas. Estes dados sugerem que alguns alunos são capazes de comparar números racionais e irracionais, em que estes se representam na forma de raiz quadrada. Numa análise das respostas dos alunos que apresentaram uma resposta incorreta, averiguei que os números que indicaram estavam entre – 2 e 1, mas eram racionais. Penso assim que estes alunos não mostram evidências de não saberem comparar números envolvendo raízes quadradas de números naturais, mas sim de ainda não se terem apropriado da noção de número irracional. Tendo em conta os dados de Barbosa (2013) e o facto de que a estes alunos tinham sido lecionadas a noção de raiz quadrada de um número racional e o cálculo da raiz quadrada de quadrados perfeitos antes do 9º ano de escolaridade, quando são lecionados os números irracionais (ME, 2007), os alunos evidenciam saber comparar números reais com recurso a raízes quadradas de números naturais.

Consideremos, no entanto, que o aluno é confrontado com as raízes quadradas de dois números naturais que não são quadrados perfeitos. Pode o aluno comparar essas duas raízes quadradas sem obter os seus valores aproximados através da calculadora? Um dos métodos para o fazer é recorrer à representação na reta real. Na utilização deste método os alunos recorreriam assim ao processo de transformação de representações semióticas conhecido como conversão, estando ao mesmo tempo a efetuar essa conversão de um sistema semiótico para outro. Duval (2006) defende o uso de diferentes sistemas de representação semiótica para a resolução de questões e tarefas, e que essa resolução pode ser mais fácil num sistema do que noutro. Segundo Barbosa (2010), "a comparação e a ordenação dos números reais são tarefas simples quando se recorre à representação na reta real" (p.78).

Nos estudos referidos anteriormente (Quaresma, 2010; Bartolomeu, 2010; Barbosa, 2010) a lecionação da comparação de números irracionais envolverá a referência à densidade de conjuntos de números reais. Tal como na comparação de números irracionais, o estudo da hipótese da existência de infinitos números irracionais entre dois números reais por parte dos alunos pode passar pelo cálculo de raízes quadradas de números naturais ou pelo recurso à reta real. Moreira, Soares e Ferreira (2009) defendem que o recurso à reta real se torna fundamental para compreender, não apenas que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$ {Números irracionais}, mas também a infinidade de conjuntos numéricos como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. No seu estudo acerca das conceções sobre o sistema dos números reais de um grupo de 84 alunos dos cursos de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais e da Universidade Federal de Santa Catarina, Moreira, Soares e Ferreira (2009) notam que apenas 25% dos alunos são capazes de apresentar três números irracionais situados entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Moreira, Soares e Ferreira (2009) também observam que ao questionarem os alunos acerca do número de números irracionais entre esses dois números, apenas 42% afirma que existem infinitos, sem apresentarem uma explicação, e apenas 3 alunos apresentaram uma justificação correta. Ao longo do seu estudo, os autores observam que 62% dos alunos não apresentaram uma noção correta de número irracional, podendo influenciar os conhecimentos dos alunos acerca da densidade de números reais. Melo (1999) também aborda no seu estudo a densidade dos números reais e apresenta aos seus participantes as seguintes afirmações para eles determinarem a sua veracidade ou falsidade:

a) Entre dois irracionais há um irracional.
b) Entre dois racionais há um irracional.
c) Entre dois irracionais há um racional.

Melo (1999) registou que as percentagens de alunos de cada curso que acertaram na classificação de cada uma das afirmações variaram entre 25,4% e 66,5%, levando-o a concluir que os alunos revelam fortes dificuldades na compreensão de aspetos relativos à densidade. Sirotic e Zazkis (2006) realizam um questionário semelhante no seu estudo em que pedem aos participantes para analisarem as afirmações abaixo quanto à sua veracidade ou falsidade e que explicassem as suas respostas:

a) É sempre possível encontrar um número racional entre dois números irracionais.

b) É sempre possível encontrar um número irracional entre dois números irracionais.

c) É sempre possível encontrar um número irracional entre dois números racionais.

Numa quantificação de dados, Sirotic e Zazkis (2006) registam que as percentagens dos 46 professores de ensino secundário em formação que responderam corretamente e que não apresentaram uma resposta às questões pela ordem disposta foram de 52,2%, 69,5% e 71,6%, e de 21,7%, 19,6% e 23,9%, respetivamente. Tanto Melo (1999) como Sirotic e Zazkis (2006) mostram evidências de que alguns dos participantes dos seus respetivos estudos possuem dificuldades em compreender a noção de densidade dos números reais. Sirotic e Zazkis (2006) apresentaram algumas das explicações por parte dos alunos que responderam de forma correta às questões, que são consistentes com os conhecimentos formais em Matemática, mas defendem, no entanto, que as respostas apresentadas pelos participantes do estudo foram baseadas na sua intuição. Na questão a) um dos participantes do estudo justificou que terminando a parte decimal de um grande número cria-se um número maior que o primeiro e menor que o segundo; na questão b) um dos professores argumentou que ao expandir a parte decimal tal que nunca termina ou se repete e que é maior que o primeiro e menor que o segundo. Sirotic e Zazkis (2006) também apresentam as justificações de professores que responderam incorretamente às questões. Na questão b) um dos professores explica que os espaços entre dois números irracionais é infinitamente pequeno e que haverá assim apenas dois números irracionais que estão próximos uns dos outros; um professor expôs como crença que os números alternam: racional, irracional, racional, irracional…, então entre dois números racionais apenas haverá um irracional e entre dois números irracionais haverá apenas um número racional. Sirotic e Zazkis (2006) argumentam que as respostas incorretas dos professores que participaram no estudo se devem à falta da noção de infinito, destacando assim a importância dos alunos terem assentes as noções dos conjuntos numéricos e de serem infinitos. De modo semelhante, Moreira, Soares e Ferreira (2009) defendem que "uma boa perceção de como se situam $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ na reta numérica é fundamental para compreender o papel desses conjuntos na formação dos reais e a própria natureza do contínuo numérico" (p.10). Sirotic e Zazkis (2006) ainda referem que a maioria dos participantes do estudo se baseou inteiramente na representação decimal dos números e que isso contribuiu para a compreensão da noção de infinito. Torna-se assim importante garantir uma ótima lecionação das várias representações do número irracional, dos conjuntos numéricos e da representação de números irracionais na reta real antes de abordar a densidade de números irracionais na sala de aula. Estas autoras afirmam ainda que "o conceito de número irracional é inerentemente difícil" (p.75) pois o número irracional dispõe de várias representações, possui um processo complexo de representação na reta real, as regras de operações com este tipo de números são diferentes das que se verificam nos números racionais e compreender as relações de ordem exige dominar vários conceitos prévios relativos aos números racionais e irracionais. Torna-se assim essencial que o professor reflita sobre o processo de ensino-aprendizagem dos números irracionais.

Capítulo 3 – Unidade de Ensino

A base da elaboração deste estudo foi a intervenção letiva que realizei numa turma do 8º ano de escolaridade na unidade de ensino “Dízimas infinitas não periódicas e números reais”. Neste capítulo começo por apresentar uma caraterização da escola e da turma onde foi feita a minha intervenção, e os conceitos fundamentais da unidade de ensino. Depois será apresentada uma descrição das estratégias de ensino adotadas, das tarefas que foram propostas aos alunos e das aulas lecionadas.

3.1. Contexto escolar

3.1.1. Caraterização da escola

A Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto localiza-se na freguesia de Queluz do concelho de Sintra. A freguesia de Queluz carateriza-se por uma atividade de comércio e serviços, maioritariamente familiares, e tem uma população de 25982 habitantes (Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas, 2013). A grande maioria da população empregada trabalha fora da freguesia e a distribuição da população residente quanto ao seu nível de escolaridade apresenta-se no quadro abaixo.

Quadro 1 - Nível de Escolaridade da População Residente da Freguesia de Queluz (Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas, 2013)

Grau de Escolaridade	População (%)
Nenhum	6,9
Pré-escolar	2,1
1º Ciclo	26,0
2º Ciclo	9,9
3º Ciclo	20,0
Ensino Secundário	21,4
Ensino Pós-Secundário	0,8
Ensino Superior	13,1

A escola abriu portas em 1972 e em 2012 após ser intervencionada pelo Estado, formou o Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas com outros onze estabelecimentos de ensino, que recebeu 4281 alunos no ano letivo 2012-2013.

A escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto possui oito pavilhões, com dois pisos cada um. A escola possui uma biblioteca e todas as salas de aula da escola possuem equipamento informático e multimédia.

Na procura de um estabelecimento de ensino com mais e melhor qualidade, a escola define como metas a promoção da equidade e da inclusão, a diminuição das taxas de abandono, a oferta de melhores oportunidades de aprendizagem, uma maior ligação à comunidade local, a defesa de direitos humanos e uma gestão transparente e justa na execução de decisões (Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas, 2013).

3.1.2. Caraterização da turma

No início do ano letivo, a turma em que realizei a intervenção letiva era constituída por 30 alunos, dos quais 26 já pertenciam à mesma turma no 7º ano. No decurso do 1º período, dois desses 26 alunos deixaram de pertencer à turma: uma aluna mudou de turma e um aluno mudou de Escola. A turma passou assim a ter 28 alunos: 13 rapazes e 15 raparigas, cuja distribuição etária no início e no final do ano letivo apresento no gráfico da figura seguinte.

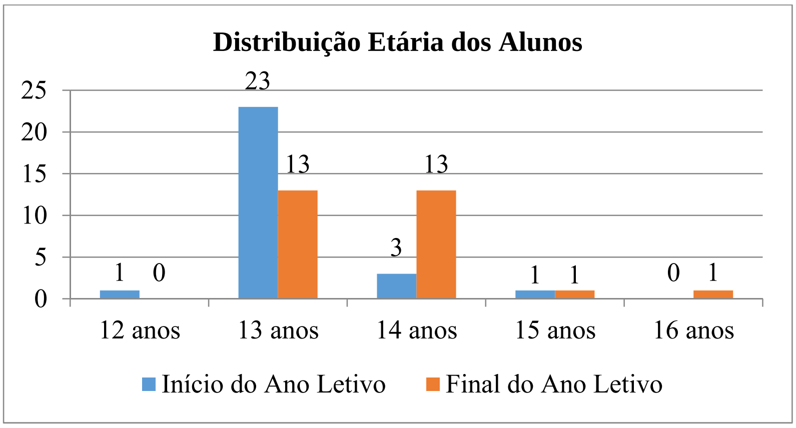


Figura 1 - Distribuição Etária dos Alunos da Turma no Início e Fim do Ano Letivo 2016-2017

Na turma, há dois alunos identificados com Necessidades Educativas Especiais, apesar de haver outros que apresentam problemas de saúde que requerem atenção. Na turma também há sete alunos de origem estrangeira, dos quais seis de países africanos e um de origem asiática, todos capazes de falar e compreender português e que estão bem enquadrados na turma, notando-se pelas suas interações na turma, nomeadamente pelo trabalho colaborativo em grupo.

Em relação ao desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, as suas classificações nos diferentes períodos do ano letivo encontram-se na Figura 2. Como se pode observar, o melhor desempenho dos alunos verificou-se no 1º período pois 17 dos 28 alunos tiveram classificação positiva, enquanto no 2º período o número de classificações negativas na turma registou o seu valor mais elevado. Apesar de ambos os períodos letivos serem constituídos por um igual número de semanas, penso que a descida das classificações dos alunos do 1º para o 2º período se deveu à lecionação de uma maior variedade de conteúdos programáticos. Penso que um fator também influente foi de a avaliação ter sido constituída por testes que visavam conteúdos lecionados desde o início do ano letivo, obrigando os alunos a rever mais conteúdos para os testes do 2º período do que para o 1º.

No 3º período, nota-se uma melhoria das classificações dos alunos em relação ao 2º período, com a diminuição do número de alunos com Nível 2 e o aumento do número de alunos com Nível 4. Penso que esta melhoria se deveu ao facto de no 3º período se ter realizado apenas um teste, obrigando os alunos a efetuarem uma preparação mais exigente. Numa análise mais atempada dos testes dos alunos, verifiquei que a classificação no teste realizado no 3º período de 17 dos 28 alunos foi superior à média dos testes que realizaram no 2º, e que os alunos que subiram a nota foram os que registaram as melhorias mais significativas na turma.

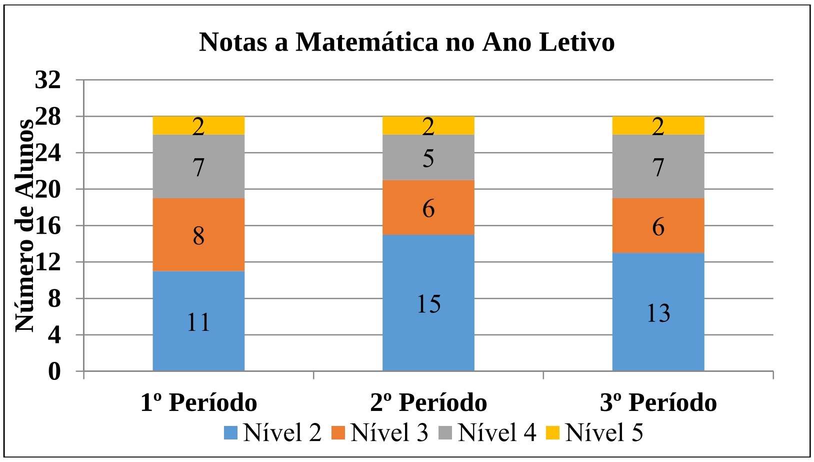


Figura 2 - Notas a Matemática por Período no Ano Letivo 2016-2017

Nas aulas, existem momentos em que os alunos exibem concentração quando o professor se lhes dirige com o objetivo de explicar conteúdos matemáticos ou esclarecer dúvidas. Os alunos também demonstram atenção durante o trabalho autónomo e a discussão coletiva de tarefas. No entanto, existem momentos nas situações referidas anteriormente em que tende a haver alguma instabilidade provocada por um número reduzido de alunos e aí o professor é obrigado a intervir. Nas reuniões de conselho de turma, o comportamento dos alunos sempre gerou algum debate e foi classificado como irregular (1º período), perturbador e não satisfatório (2º período) e pouco satisfatório (3º período), e foi apontada como causa destas classificações o nível de imaturidade de alguns alunos.

No final do 2º período havia oito alunos em risco de reprovação, mas dois conseguiram recuperar no 3º período, outros dois foram submetidos a votação em conselho de turma, o que lhes permitiu transitar para o 9º ano e nove alunos apresentaram um desempenho que lhes valeu um lugar no quadro de honra da escola.

Concluindo, dos vinte e oito alunos da turma, quatro não transitaram de ano, e vinte e quatro foram aprovados, apesar de nove terem tido Nível 2 na disciplina de Matemática.

Durante o ano letivo eu tive a oportunidade de observar as aulas desta turma e antes da lecionação da unidade de ensino pude orientar algumas aulas, o que me permitiu conhecer melhor os alunos a nível de participação nas discussões coletivas de tarefas. Durante o trabalho autónomo também pude circular na sala de aula e observar o trabalho que os alunos efetuavam e apoiá-los com as suas eventuais dificuldades. Uma caraterística da turma com que me deparei foi a facilidade que os alunos tiveram em aceitar a presença de um outro professor na sala de aula, assim como de trabalhar com ele. Observei que muitos dos alunos também mostraram interesse em desenvolver a sua relação profissional e pessoal com o novo professor, contribuindo simultaneamente de forma positiva para o ambiente de trabalho na sala de aula. Ao longo do ano letivo também discutia com o professor cooperante sobre algumas das capacidades cognitivas e transversais dos alunos, dando assim mais oportunidades para conhecer melhor os alunos da turma.

Dos 28 alunos (13 rapazes e 15 raparigas), 20 (8 rapazes e 12 raparigas) entregaram a autorização dos seus encarregados de educação para participarem neste estudo. Apesar de nem todos os alunos terem entregado a autorização e assim não poderem participar no estudo, fiquei satisfeito com a composição do grupo que o fez. Deste grupo fazem parte alunos com diferentes graus de desempenho e também possuem alguma heterogeneidade relativamente à disposição para cooperarem e participarem em discussões coletivas.

3.2. Ancoragem da unidade de ensino

Este estudo tem como principal tema os números irracionais, que se enquadra no tópico "Dízimas infinitas não periódicas e números reais" que se inclui no domínio Números e Operações do atual programa de Matemática para o Ensino Básico em vigor (2013). A lecionação dos números irracionais dividiu-se em quatro partes: a noção de número irracional, a representação de números irracionais na reta real, operações com números irracionais e relações de ordem entre números irracionais.

Na primeira parte, pretende-se que os alunos sejam capazes de identificar um número irracional representado na forma de dízima ou na forma de raiz quadrada, estabelecendo também ao mesmo tempo a relação entre número racional, número irracional e os diferentes tipos de dízima. Também são trabalhadas as noções dos conjuntos dos números reais. Na segunda parte, pretende-se que os alunos saibam o processo de construção geométrica para representar na reta real um número irracional na forma de raiz quadrada. Na terceira parte, pretende-se que os alunos sejam capazes de somar, subtrair, multiplicar e dividir raízes quadradas, assim como efetuar o seu quadrado. Na quarta parte pretende-se que os alunos saibam comparar números irracionais representados na forma de dízima e na forma de raiz quadrada, abordando também a densidade dos números reais.

Antes da lecionação dos novos conceitos, previstos na unidade de ensino, os alunos têm de possuir conhecimentos matemáticos de anos anteriores. Relativamente ao domínio "Números e Operações", os alunos deverão saber: a noção de número racional e as suas representações (na forma de fração, na forma decimal e na forma de número inteiro); o que representam os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$; localizar números racionais na reta real; operar com números racionais; e comparar números racionais, especificamente na forma de dízima. No âmbito da lecionação do processo de construção geométrica para a representação de raízes quadradas de números naturais na reta real, os alunos também deverão conhecer, relativamente ao domínio "Geometria e Medida", a noção de circunferência e o Teorema de Pitágoras.

A intervenção letiva, que contou com dez aulas de 50 minutos cada, teve lugar nas três penúltimas semanas do 2º período e nas duas primeiras semanas do 3º período. Esta intervenção foi interrompida no 2º período no dia 17 de março para a realização de teste e na última semana apenas haveria uma aula de 50 minutos que se destinou a autoavaliação. No 3º período estava previsto a intervenção recomeçar e terminar na primeira semana, nos dias 20 e 21 de abril, respetivamente, mas no dia 21 realizou-se greve dos funcionários não docentes, portanto a aula prevista para 21 de abril realizou-se no dia 24 na segunda semana do 3º período.

Para cada aula, fiz um plano onde apresento os tópicos da aula e os objetivos de aprendizagem, os conhecimentos prévios dos alunos que são requeridos, as capacidades transversais a desenvolver, os recursos a utilizar pelo professor e pelos alunos e a avaliação das aprendizagens. Também inclui a metodologia e o desenvolvimento da aula, onde apresento os momentos da aula e os respetivos tempos previstos, a antecipação das estratégias de resolução e das dificuldades dos alunos bem como uma previsão da discussão das tarefas propostas.

No quadro 2 apresenta-se a planificação da unidade de ensino, que inclui os tópicos abordados nas aulas, os objetivos de aprendizagem e a tarefa concretizada na aula.

Quadro 2 - Planificação da Unidade de Ensino

Aula Data	Tópicos	Objetivos	Tarefa
1ª 13-03-2017	Dízima finita; Dízima infinita periódica; Dízima infinita não periódica; Número racional.	Explorar a representação decimal e fracionária de número racional; Reconhecer a existência de um novo tipo de dízima (infinita não periódica); Reconhecer a ineficácia do uso da calculadora na identificação de dízimas infinitas periódicas e de números racionais.	*Números e dízimas*
2ª 16-03-2017	Dízima infinita não periódica; Número racional; Número irracional; Número real; Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.	Reconhecer que para a raiz quadrada de um número ser um número racional, o primeiro tem de ser um quadrado perfeito; Reconhecer que a raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito é uma dízima infinita não periódica; Reconhecer que um número que é representado por uma dízima infinita não periódica não pode ser escrito na forma de fração; Reconhecer que todo o número que não é racional é irracional; Reconhecer que todo o número irracional é representado por uma dízima infinita não periódica; Reconhecer o número irracional sob diferentes representações; Saber que um número real é um número inteiro ou um número que pode ser representado por uma dízima finita ou infinita; Reconhecer a existência de um novo conjunto: o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$; Saber que $\mathbb{R}$ é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.	*Números e dízimas* *Novos números e um novo conjunto*
3ª 20-03-2017	Números reais; Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.	Saber identificar a natureza de um número sob diferentes representações; Saber interpretar o diagrama de Venn quando usado para estabelecer a relação entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$; Reconhecer que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.	*Os números reais*
4ª 23-03-2017	Números reais; Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$; Representação de números irracionais na reta real.	Reconhecer a existência de números irracionais na reta real; Reconhecer que entre dois números reais existe uma infinidade de números reais; Saber utilizar o Teorema de Pitágoras para construir geometricamente raízes de números naturais e representá-los na reta real; Saber localizar na reta real o simétrico de um número irracional, feita a construção geométrica deste.	*Números reais e conjuntos* *Números irracionais e a reta real*
5ª 24-03-2017	Representação de números irracionais na reta real; Construção geométrica para a representação de	Reconhecer a existência de números irracionais na reta real; Reconhecer que entre dois números reais existe uma infinidade de números reais; Saber utilizar o Teorema de Pitágoras para construir	*Números irracionais e a reta real* *Construindo números*

	números irracionais na reta real.	geometricamente raízes de números naturais e representá-los na reta real; Saber localizar na reta real o simétrico de um número irracional, feita a construção geométrica deste.	*irracionais na reta real*
6ª 27-03-2017	Construção geométrica para a representação de números irracionais na reta real.	Saber utilizar o Teorema de Pitágoras para construir geometricamente raízes de números naturais e representá-los na reta real; Saber localizar na reta real o simétrico de um número irracional, feita a construção geométrica deste; Saber localizar na reta real o número $a+\sqrt{b}$, sendo a real e b natural, após obter a representação de $\sqrt{b}$ na reta real.	*Construindo números irracionais na reta real*
7ª 30-03-2017	Operações com números irracionais.	Saber que a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a potenciação se podem estender aos números reais; Saber que só se pode somar e subtrair raízes quadradas de números naturais quando o radicando é igual; Saber que o produto das raízes quadradas de dois números é igual à raiz quadrada do produto desses números; Saber que o quociente das raízes quadradas de dois números é igual à raiz quadrada do quociente desses números; Saber que o quadrado da raiz quadrada de qualquer número positivo é igual a esse número.	*Operações com números irracionais*
8ª 31-03-2017	Operações com números irracionais.	Rever as operações com números irracionais por meio da resolução de um problema.	*Números irracionais: operações e comparações*
9ª 20-04-2017	Números racionais e números irracionais em forma de dízima e relações de ordem.	Saber comparar números em forma de dízima; Saber enquadrar um número irracional entre duas dízimas finitas; Saber encontrar números racionais e irracionais entre dois números reais; Saber ordenar números irracionais na forma de raiz quadrada; Reconhecer que uma raiz quadrada positiva é maior que outra quando o radicando da primeira é maior que o da segunda; Reconhecer que uma raiz quadrada negativa é maior que outra quando o radicando da primeira é menor que o da segunda; Reconhecer que entre dois números racionais existem infinitos números irracionais; Reconhecer que entre dois números irracionais existem infinitos números irracionais.	*Números irracionais e relações de ordem*
10ª 24-04-2017	Números irracionais na forma de raiz quadrada e relações de ordem.	Saber ordenar números irracionais na forma de raiz quadrada; Reconhecer que uma raiz quadrada positiva é maior que outra quando o radicando da primeira é maior que o da segunda; Reconhecer que uma raiz quadrada negativa é maior que outra quando o radicando da primeira é menor que o da segunda.	*Números irracionais, operações e relações de ordem*

Como referido, a lecionação da noção de número irracional exigirá que os alunos tenham como conhecimentos prévios a noção de número racional, assim como as suas várias representações. Tendo em conta a importância destes tópicos para a intervenção letiva decidi que a primeira tarefa iniciaria com questões para os alunos explorarem as várias representações do número racional.

3.3. Conceitos fundamentais da unidade de ensino

Na redação dos planos de aula e das tarefas, apercebi-me que havia alguns tópicos da unidade de ensino dos quais eu não estava totalmente ciente. Vi então necessidade de rever a classificação das dízimas, a racionalidade de um número em forma de dízima e do processo da construção geométrica necessário para representar a raiz quadrada de um número natural que representa um número irracional. Segundo o novo programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), está previsto estes conteúdos serem lecionados no 8º ano de escolaridade enquanto eu aprendi no 9º ano. E ao rever o meu manual e caderno de Matemática do 9º ano de escolaridade, verifiquei que havia alguns tópicos desta unidade de ensino que não me tinham sido lecionados, como o caso das operações e das relações de ordem com números irracionais na forma de raiz quadrada.

Perante estas limitações e após uma análise atempada do programa de Matemática e das metas curriculares para o 8º ano (MEC, 2013), além de aproveitar o meu próprio manual, *Matemática 9º ano* (Neves & Faria, 2003) da Porto Editora, recorri ao manual adotado na escola para esta turma, *Pi Volume 2, Matemática 8º Ano* (Magro, Fidalgo & Louçano, 2016) da Edições ASA, e aos manuais *Matemática em ação 8* (Passos & Correia, 2016) da Raiz Editora/Lisboa Editora e *Matemática em Ação 9* (Thudichum, Passos & Correia, 2013). Com esta bibliografia pude rever os conteúdos da unidade de ensino e planificar a unidade de ensino de modo que fosse possível organizar a minha intervenção tal que fosse possível lecioná-la de forma estruturada para os alunos.

É assim apresentada uma descrição dos conteúdos que foram lecionados na minha intervenção da unidade de ensino segundo o programa de Matemática (MEC, 2013): *dízimas infinitas não periódicas e números irracionais*. Aquando do planeamento da unidade de ensino, viu-se como vantajoso a revisão de alguns conteúdos referentes a outra unidade de ensino do mesmo programa: *dízimas finitas e infinitas periódicas*, cuja descrição também se apresenta a seguir. Estas descrições são feitas com base central no manual adotado pela turma, que está certificado segundo as novas metas curriculares e o novo programa de Matemática para o ensino básico (MEC, 2013).

3.3.1. Dízimas e números racionais

Uma **dízima finita** (de comprimento N) é uma expressão de forma $a_0, a_1 a_2 \dots a_N$, onde a_0 é a representação decimal de um número inteiro e, para n = 1,2,…, N, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ou seja, a_n é um algarismo.

Uma fração decimal é o quociente de dois números inteiros, em que o denominador não tem fatores primos diferentes de 2 e de 5. Uma fração decimal, ou equivalente, é representada por uma dízima finita.

Uma **dízima infinita** é uma expressão da forma $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, onde a_0 é a representação decimal de um número inteiro e onde, após a vírgula, está representada uma sequência infinita de algarismos $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Se essa sequência, a partir de um dado momento se repete em grupos de um ou mais algarismos, ordenados e sempre na mesma disposição, diz-se que é uma **dízima infinita periódica**. Esse grupo de um ou mais algarismos chama-se **período**.

Uma fração irredutível que não seja equivalente a uma fração decimal é representada por uma **dízima infinita periódica**.

Qualquer número real que possa ser representado por uma fração, ou seja, qualquer número real que possa ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b números inteiros e $b \neq 0$, diz-se um **número racional**. Assim, reconhece-se que todas as dízimas finitas e todas as dízimas infinitas periódicas são números racionais.

3.3.2. Números irracionais

Toda a dízima que não é finita, nem infinita periódica, é infinita não periódica. Todo o número real que é representado por uma dízima infinita não periódica é designado por **número irracional**. O primeiro número irracional conhecido foi a raiz quadrada de 2, do qual se demonstra a sua irracionalidade abaixo por absurdo:

Demonstração da Irracionalidade de $\sqrt{2}$

Suponha-se que $\sqrt{2}$ é um número racional.

Se $\sqrt{2}$ é um número racional, então pode ser representado por uma fração.

Seja $\frac{p}{q}$ a fração irredutível $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ que representa $\sqrt{2}$.

Então, $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, ou seja $\frac{p^2}{q^2} = 2$, ou, de forma equivalente, $p^2 = 2 \times q^2$.

Tem-se que $2 \times q^2$ é um número par. Sendo assim, p^2 também é um número par. Se p^2 é um número par, p também o é, uma vez que se p fosse ímpar, o seu quadrado também o seria. Temos, então, que $p = 2 \times k$, sendo k um número inteiro. Substituindo p por $2 \times k$ na igualdade $p^2 = 2 \times q^2$ tem-se:

$$(2 \times k)^2 = 2 \times q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$$

Mas então q também é um número par. Se p é par e q também o é, a fração $\frac{p}{q}$ não é irredutível, o que é absurdo. O absurdo resultou de se ter considerado que $\sqrt{2}$ poderia ser um número racional, logo $\sqrt{2}$ é irracional.

Figura 3 - Demonstração da Irracionalidade de $\sqrt{2}$

Um quadrado perfeito é um número natural que pode ser expresso pelo produto de um número natural por ele próprio (exemplos: 1, 4, 9, etc.) A raiz quadrada de um quadrado perfeito corresponde a um número natural. De forma análoga à demonstração anterior se pode provar que se n $(n \in \mathbb{N})$ não é quadrado perfeito, então $\sqrt{n}$ é irracional.

O conjunto dos números naturais é representado por $\mathbb{N}$, o conjunto dos números inteiros por $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos números racionais por $\mathbb{Q}$. Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta o conjunto dos números reais, que se representa por $\mathbb{R}$. O esquema que se apresenta a seguir representa as relações entre estes conjuntos.

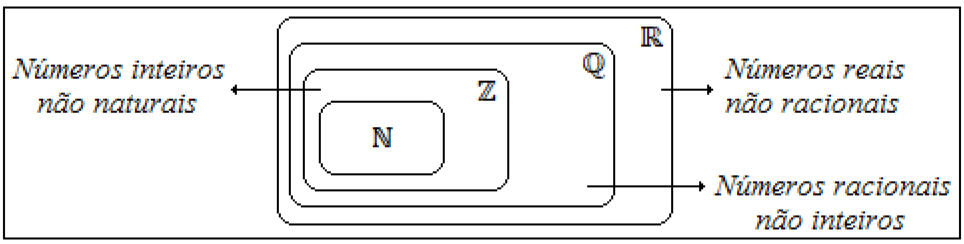


Figura 4 - Números Reais

Podemos usar o símbolo $\subset$ para representar as relações entre os conjuntos referidos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3.3.3. Representação de raízes quadradas de números naturais na reta real

Na reta real, existem pontos cujas abcissas não correspondem a números racionais. Estes números designam-se por irracionais.

A representação da raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito na reta real requer um processo de construção geométrica faseado em duas etapas. A primeira etapa consiste na construção de um triângulo retângulo em que o comprimento da sua hipotenusa tem de corresponder ao número irracional que se quer representar, podendo o Teorema de Pitágoras ser uma ferramenta necessária. A segunda etapa consiste em traçar um arco de circunferência com centro na origem da reta real e que intersete o vértice do triângulo em que se intersetam a hipotenusa e o cateto correspondente à altura do triângulo, e a reta real, assinalando-se nesta depois o ponto obtido. Abaixo se apresenta, como exemplo deste processo, a construção geométrica da raiz quadrada de 5 na reta real.

Representação de $\sqrt{5}$ na Reta Real

Consideremos um triângulo retângulo cujos catetos meçam 1 e 2.

Pelo Teorema de Pitágoras verifica-se que a hipotenusa mede $\sqrt{5}$, porque $1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$.

Recorrendo ao compasso, coloca-se a ponta seca na origem da reta real e a outra ponta no vértice em que se intersetam o cateto correspondente à altura do triângulo e a hipotenusa. O comprimento desta corresponderá assim à abertura do compasso. Depois traça-se o arco de circunferência no sentido dos ponteiros do relógio até intersetar com a reta real. O ponto de interseção do arco com a reta real corresponderá ao ponto de abcissa $\sqrt{5}$.

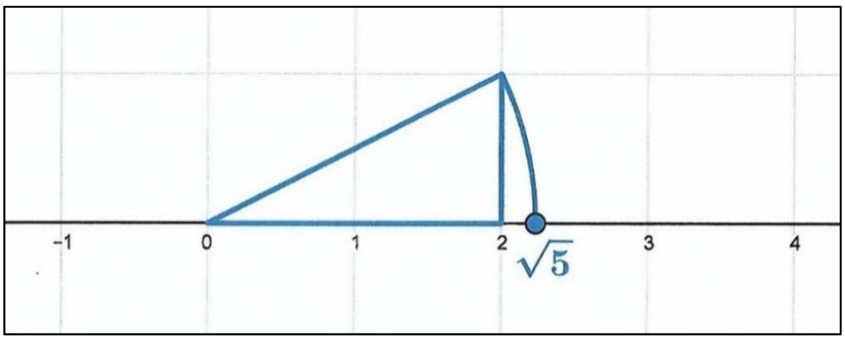


Figura 5 - Representação de $\sqrt{5}$ na Reta Real

A partir da representação do número $\sqrt{a}$ (a é um número natural) na reta real, é possível representar outros números na reta real, como – $\sqrt{a}$, $\sqrt{a} + b$ e $\sqrt{a} - b$, – $\sqrt{a}$ + b e – $\sqrt{a}$ – b (b é um número natural). Apresentam-se a seguir exemplos dos números irracionais referidos recorrendo à representação (já construída) da raiz quadrada de 5.

Representação de – $\sqrt{5}$ na Reta Real

Para representar – $\sqrt{5}$ na reta real, existem dois processos distintos: se $\sqrt{5}$ estiver representado na reta real basta colocar a ponta seca do compasso na origem da reta real e a outra no ponto cuja abcissa é $\sqrt{5}$. Depois traça-se um arco de circunferência tal que intersete a reta real. Caso se recorra ao segundo processo constrói-se o triângulo com as dimensões usadas para a representação de $\sqrt{5}$, mas que resulte de uma reflexão em relação à reta $x = 0$.

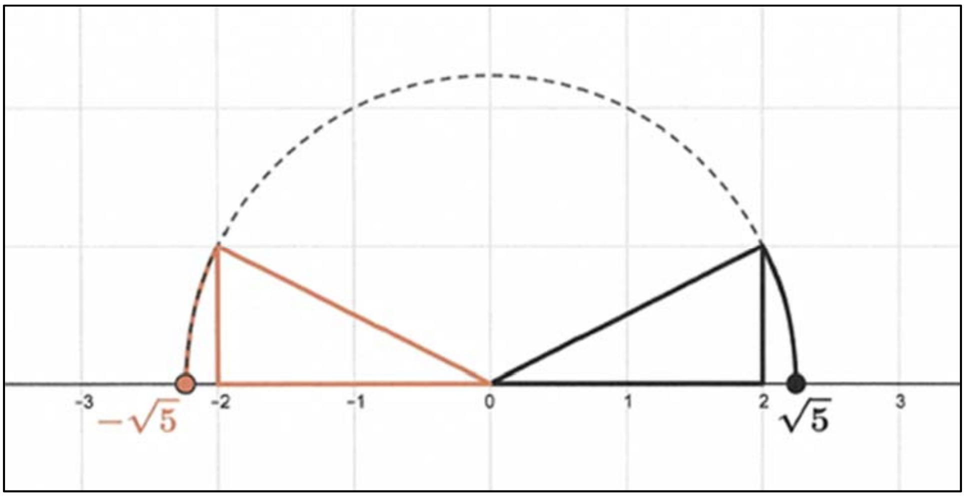


Figura 6 - Representação de $-\sqrt{5}$ na Reta Real

Para os números $\sqrt{a} + b$, $\sqrt{a} - b$, – $\sqrt{a}$ + b e – $\sqrt{a}$ – b (a, b são números naturais) é necessário primeiro representar $\sqrt{a}$ na reta real para depois fazer o mesmo para os números $\sqrt{a} + b$ e $\sqrt{a} - b$ e no caso de – $\sqrt{a}$ + b e – $\sqrt{a}$ – b tem que se representar primeiro – $\sqrt{a}$ (a, b são números naturais). Depois basta efetuar uma translação de b unidades: para $\sqrt{a} + b$ e de – $\sqrt{a}$ + b a translação será efetuada para a direita e no caso de $\sqrt{a} - b$ e de – $\sqrt{a}$ – b será para a esquerda.

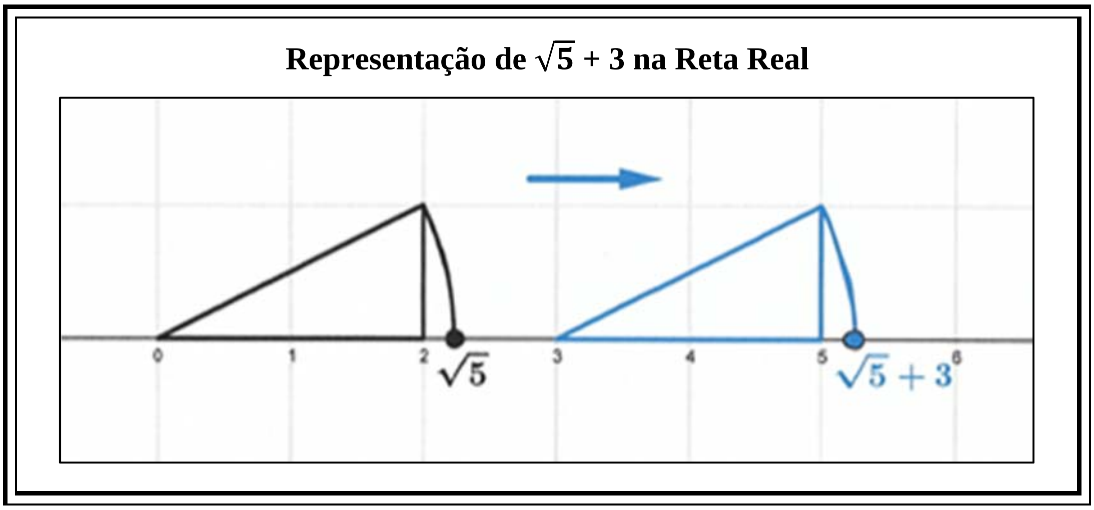


Figura 7 - Representação de $\sqrt{5}+3$ na Reta Real

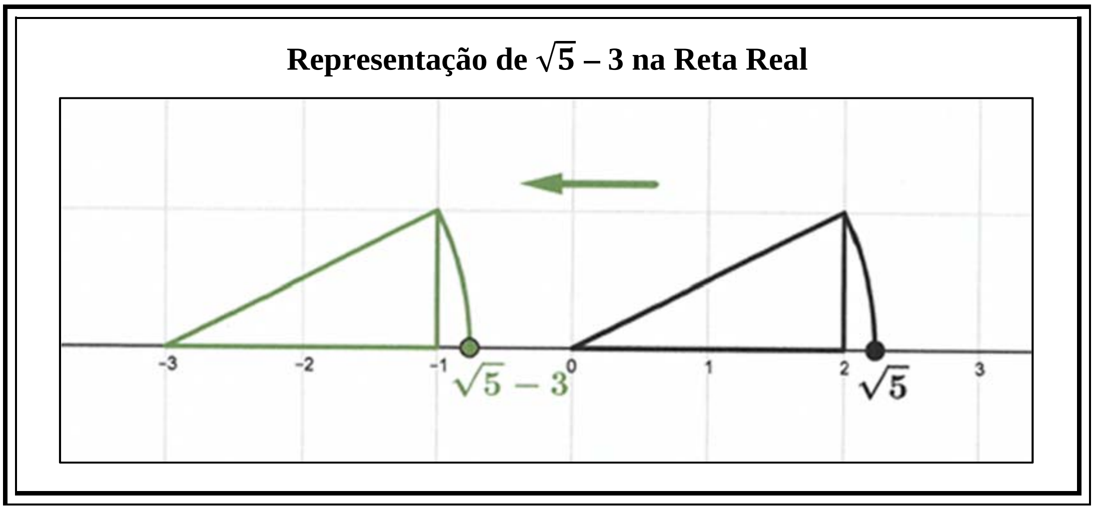


Figura 8 - Representação de $\sqrt{5}-3$ na Reta Real

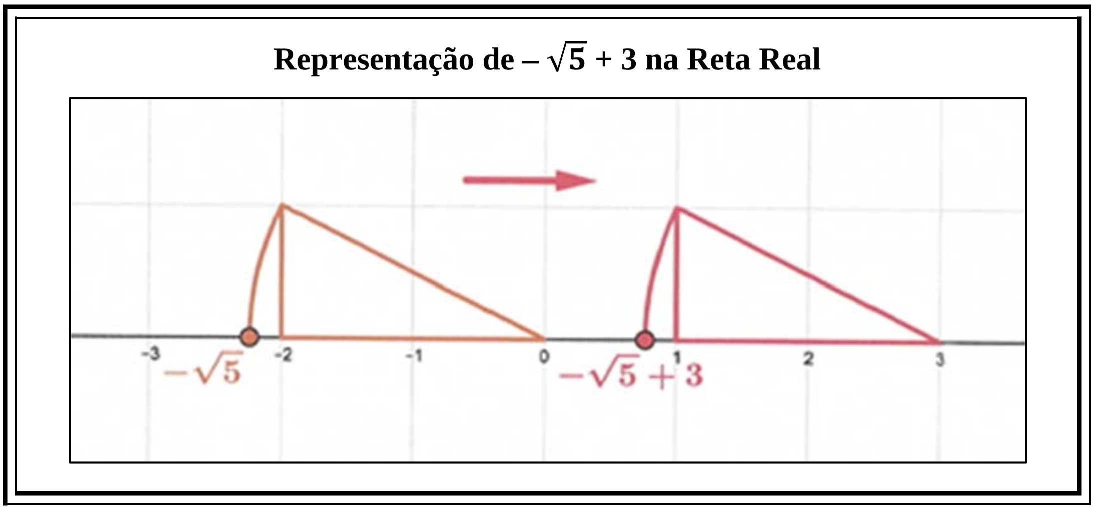


Figura 9 - Representação de $-\sqrt{5}+3$ na Reta Real

Representação de $-\sqrt{5}-3$ na Reta Real

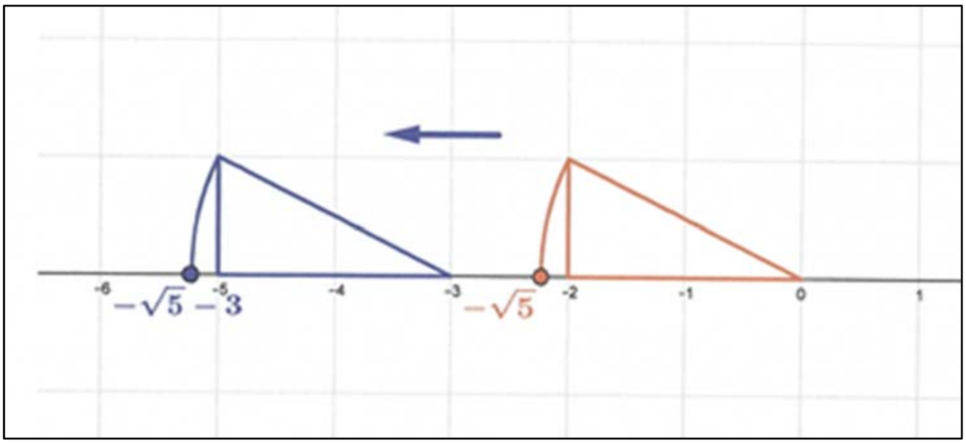


Figura 10 - Representação de $-\sqrt{5}-3$ na Reta Real

3.3.4. Operações algébricas com raízes quadradas

Todas as propriedades das operações algébricas definidas sobre os números racionais (adição, subtração, multiplicação e divisão), bem como a potenciação e a raiz cúbica se podem estender aos números reais, assim como a raiz quadrada a todos os números reais não negativos. De seguida se apresentam as generalizações das operações com raízes quadradas de números inteiros não negativos e alguns exemplos.

Adição e Subtração: $a\sqrt{c} \pm b\sqrt{c} = (a \pm b)\sqrt{c},\ a, b \in \mathbb{R},\ c \geq 0$

Exemplo 1: $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

Exemplo 2: $8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Multiplicação: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b},\ a, b \geq 0$

Exemplo 1: $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$

Exemplo 2: $\sqrt{6} \times \sqrt{3} = \sqrt{18}$

Quadrado: $(\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0$

Exemplo 1: $(\sqrt{3})^2 = 3$

Exemplo 2: $(\sqrt{8})^2 = 8$

Divisão $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},\ a \geq 0,\ b > 0$

Exemplo 1: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}$

Exemplo 2: $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{42}{6}} = \sqrt{7}$

3.3.5. Comparação de números reais

Apresenta-se agora um critério para a comparação dos números reais representados em forma de dízima e em forma de raiz quadrada de um número natural. Dois números reais positivos representados na forma de dízima são comparados da seguinte forma:

- Se tiverem partes inteiras distintas, é maior o que tem maior parte inteira;
- Se tiverem partes inteiras iguais, é maior o que tiver maior o algarismo da maior ordem decimal em que as duas dízimas diferem (excluindo o caso das dízimas de período 9).

Exemplo 1: 8,567 > 6,986

Exemplo 2: 6,4565 < 6,6890

Exemplo 3: 15,8234… > 15,8216…

Na comparação de raízes quadradas de números naturais o processo realiza-se através da comparação dos radicandos. Considerando dois números naturais a e b:

- Se $a > b$, então $\sqrt{a} > \sqrt{b}$
- Se $a > b$, então $-\sqrt{a} < -\sqrt{b}$

Exemplo 1: $\sqrt{8} > \sqrt{3}$

Exemplo 2: $-\sqrt{14} < -\sqrt{10}$

3.4. Estratégias de ensino

As aulas da unidade de ensino foram preparadas de forma a adotarem o método exploratório de ensino-aprendizagem. Esta estratégia de ensino distingue-se do método direto de ensino segundo dois fatores: como a informação é introduzida e a natureza das tarefas propostas aos alunos e da atividade delas decorrente (Ponte, 2005). Os alunos extraem assim a informação através das tarefas que são propostas na sala de aula e que serão elas o elemento dominante da aula, pois esta será constituída essencialmente pelo trabalho realizado na resolução da tarefa e pela sua discussão e eventual sistematização de ideias. Existe assim uma atribuição importante ao trabalho desenvolvido pelos alunos na sala de aula, e o ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas e que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva (Canavarro, 2011). Ao mesmo tempo, também se verifica que "os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (Canavarro, 2011, p.11), indo de acordo com o objetivo de promover a aprendizagem da Matemática com compreensão. Desta forma a prática de um ensino exploratório da Matemática revela-se vantajosa para os alunos.

A lecionação dos números irracionais propõe, segundo Melo (1999), várias ações matemáticas por parte dos alunos e defende o seu aprimoramento como fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática: identificar, classificar, relacionar, justificar, operar, construir, esboçar, representar e ordenar, entre outras. Sirotic e Zazkis (2006) defendem que a noção de número irracional é inerentemente difícil e que, portanto, é necessária atenção didática especial a esta aprendizagem. Portanto a implementação de um ensino exploratório dos números irracionais deve-se considerar uma hipótese viável, por ser benéfica para os alunos e para o professor. Na sua proposta para a lecionação dos números irracionais no 8º ano do ensino fundamental, Nobre e Druck (2015) defendem que "a aprendizagem da matemática está intrinsecamente relacionada com o fazer matemática, e tal ligação acontece por meio de experiências matemáticas desafiadoras, acessíveis aos alunos" (p.3). Jover (2013) destaca o recurso a atividades para os alunos realizarem na sala de aula e uma diminuição do discurso centrado no professor, assim como da sua preocupação excessiva em "vencer o conteúdo" (p. 9) na formação de informação como fatores contributivos para uma construção mais sólida do conhecimento dos números irracionais por parte dos alunos. Rezende e Nogueira (2009) defendem que um dos fatores que levou os professores presentes nos seminários de educação matemática acerca dos números irracionais a enriquecerem os seus conhecimentos foi as reflexões, as discussões e a troca de informações. Cada aula que lecionei contemplou os seguintes momentos: a apresentação da tarefa, o trabalho autónomo e a discussão da tarefa. Na apresentação da tarefa, eu peço aos alunos para se focarem nos enunciados das tarefas e notas informativas que possam conter. Durante o trabalho autónomo os alunos resolvem as tarefas e eu circulo pela sala para monitorizar o seu trabalho, apoiando-os nas suas dificuldades, ao mesmo tempo que seleciono alguns alunos para depois apresentarem ao grande grupo as suas respostas às questões da tarefa e para discutirem eventuais dúvidas entre eles. A seleção dos alunos é feita com base no trabalho que os alunos desenvolveram no trabalho autónomo, como previsto no planeamento da aula. Tendo em conta as vantagens da implementação do método exploratório, incluindo no ensino dos números irracionais, necessitei assim de refletir acerca do conteúdo das tarefas a propor aos alunos e o meu papel durante cada aula.

Na preparação para cada aula redigi o respetivo plano considerando os objetivos, os conteúdos, as estratégias, os recursos e a avaliação e procurei usufruir dele sempre da forma mais eficaz. Sempre que necessário procurei alterar o plano de aula de forma que as condições das aulas tornassem essa atitude vantajosa para os alunos. É necessário ter atenção à forma como uma aula é conduzida e perante a minha falta de experiência, é percetível que se tomasse uma atitude prudente da minha parte (Abrantes, 1985) na tomada de decisões que influenciassem os objetivos das aulas a nível de planificação.

Relativamente às tarefas, considerei na planificação, antecipar possíveis dificuldades por parte dos alunos que surgissem no trabalho autónomo, assim como possíveis resoluções e caminhos que pudessem atingir o propósito matemático da aula em articulação com os raciocínios que pudessem surgir (Canavarro, 2011). Durante o trabalho autónomo, os alunos trabalharam aos pares, pois além de constituir o método de trabalho a que eles estavam acostumados, a adoção deste método de trabalho possui várias vantagens pedagógicas. Segundo Baroody (1993), citado em Nunes (1996), a aprendizagem cooperativa pode favorecer o conhecimento matemático dos alunos, as suas capacidades de resolução de problemas e de raciocínio, o desenvolvimento de capacidades sociais e de comunicação, e a confiança. Nunes (1996) considera, no entanto, que um grupo de dois alunos não oferece à partida muitas possibilidades de interação e torna a existência do grupo problemática quando falta um dos elementos, mas também não ignora o facto de que um grupo com um número superior de alunos torna difícil a organização do seu trabalho e a chegada a consensos. Durante a lecionação da unidade de ensino foi implementada na sala de aula uma nova distribuição de lugares e a nova disposição foi alvo de reflexão da minha parte pois segundo Artzt (1994), citado em Nunes (1996), é necessário ter em consideração a atitude dos alunos em relação à Matemática na formação de grupos. Enquanto os alunos se envolviam na resolução das tarefas, eu circulava na sala de aula, apoiando-os com eventuais dificuldades e observando as estratégias de resolução que adotavam para depois escolher os alunos que apresentariam as suas resoluções durante a discussão das tarefas.

A comunicação oral tem gerado debate a nível de substituir o discurso do professor por um discurso entre o professor e os alunos, assim como entre alunos e alunos. E tendo em conta que a comunicação desempenha um papel fundamental no método exploratório de ensino-aprendizagem, como o apoio do professor às dificuldades dos alunos durante o trabalho autónomo e a comunicação entre professor e alunos e entre os alunos durante a discussão de tarefas, deve-se rever o seu papel. Ponte e Serrazina (2004) destacam a importância da participação dos alunos na comunicação de sala de aula, assim como consideram essencial que desenvolvam a competência para comunicar ideias matemáticas, e exortam assim um investimento na qualidade do discurso partilhado de professores e alunos, assim como no modo como os significados matemáticos são interactivamente construídos na sala de aula.

No apoio aos alunos com eventuais dificuldades, recorri ao questionamento, especificamente a perguntas de inquirição, pretendendo conhecer as suas compreensões, com o propósito de conhecer o seu pensamento e as suas estratégias (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). Com o recurso a este processo, pretendi que fossem os alunos a chegarem às suas próprias conclusões e que compreendessem o porquê dessas conclusões. Desta forma se fossem obtidas conclusões válidas por parte dos alunos, eles compreenderiam os passos que tomaram para as alcançar, mas em caso contrário, bastaria ajudá-los a rever esses mesmos passos, a localizar os erros cometidos e a esclarecer quaisquer dúvidas para que os alunos eventualmente encontrassem as respostas que pretendessem. Segundo Mendes, Rodrigues e Silva (2011), é através do questionamento dos porquês, das dúvidas e dos próprios erros que levam o Homem a chegar às descobertas e sua comprovação. Quando os alunos tinham dúvidas ou procuravam saber se tinham alcançado à resposta correta, eu recorria ao processo de questionamento para os esclarecer ou para que compreendessem plenamente como obtiveram a resposta que apresentavam. Portanto evitava dar-lhes indicações claras de qualquer tipo de estratégia a seguir. O objetivo foi não reduzir o caráter desafiante da tarefa ou de dispensar qualquer tipo de resolução apresentada pelos alunos que fosse alternativa às usadas na planificação ou a uma que dominasse a sala de aula de modo que o potencial da discussão matemática não se perdesse (Canavarro, 2011).

Complementando o que foi referido, durante o trabalho autónomo também recolhi dados acerca das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para depois decidir os alunos que apresentariam respostas às questões das tarefas. A finalidade era escolher resoluções que pudessem contribuir para o desenvolvimento matematicamente mais interessante idealizado pelo professor (Canavarro, 2011).

A discussão de uma tarefa possui um papel fundamental no ensino exploratório pois não consiste apenas em corrigir questões, onde se apresenta uma resposta e se apontam erros. Nesse momento de aula, debatem-se as várias estratégias de resolução utilizadas e os alunos apresentam e discutem as suas dúvidas. Outra caraterística importante da discussão é que o professor deixa de ser o protagonista da aula, e pressupõe-se um muito maior equilíbrio de participação entre ele e os alunos (Ponte, 2005), e estes assim podem "aprender conceitos e procedimentos matemáticos, bem como desenvolver as suas capacidades" (Canavarro, 2011, p.17), indo ao encontro da aprendizagem da Matemática com compreensão. Lampert (1986), citada em NCTM (2007), fundamenta e afirma que os alunos estarão a promover o reconhecimento de conexões entre ideias e, ainda a reorganizar o conhecimento recorrendo ao diálogo na sala de aula e à interação social. Encontram-se assim a discutirem as suas estratégias informais, que com a ajuda dos professores, os alunos ficam perto de se consciencializarem dos conceitos e a construí-los a partir do seu próprio conhecimento informal implícito (NCTM, 2007). Ao longo do meu acompanhamento da turma, observei que houve alunos que se envolviam ativamente na resolução de tarefas, revelavam poucas dificuldades, que participavam frequentemente na sua discussão e averiguei que apresentavam bons resultados nos momentos de avaliação. Ao mesmo tempo, observei que também havia um número substancial de alunos que apesar do envolvimento na resolução das tarefas, possuíam algumas dificuldades, não participavam ativamente na discussão e que nos momentos de avaliação apresentavam resultados que poderiam ser melhorados. No momento da discussão de uma tarefa optei por apelar à participação desses alunos, não recusando dar a palavra aos restantes quando houvesse oportunidade. Afinal, como afirmam Menezes, Ferreira, Martinho e Guerreiro

(2014), quando se dá oportunidade aos alunos para participarem no discurso da aula de matemática, é preciso ouvi-los e procurar entendê-los. Esta atitude não se revela vantajosa apenas na escolha dos alunos na apresentação da resolução das tarefas, mas também para o caso de haver desacordos entre os alunos, pois uma forma de solucionar estes potenciais desafios é procurar que os alunos introduzam novas ideias matemáticas, aprofundem-nas ou as avaliem (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013). O método exploratório apresenta assim um investimento nas capacidades de comunicação do aluno, o que vai de acordo com um dos objetivos curriculares do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013. Achei assim necessário criar condições para que se pudesse promover a comunicação na aula de Matemática, garantindo que todos os alunos prestassem atenção à minha intervenção e às dos colegas. Pois para existir uma comunicação propiciadora de aprendizagem, é necessário haver um ambiente onde os intervenientes se sintam à vontade, se respeitem mutuamente e se sintam disponíveis para procurar entender as ideias uns dos outros (Ponte & Serrazina, 2004).

Durante o trabalho autónomo a utilização da calculadora era permitida ou não consoante os objetivos da tarefa delineados no plano de aula. Algumas tarefas possuíam figuras geométricas no enunciado ou exigiam a construção de figuras geométricas na sua resolução, portanto foi posto como hipótese o uso de tecnologias no momento da discussão coletiva. Como "o poder gráfico das ferramentas tecnológicas possibilita o acesso a modelos visuais que são poderosos, mas que muitos alunos são incapazes ou não estão dispostos a realizar de modo independente" (NCTM, 2007, p.27), optou-se assim em utilizar o *software* GeoGebra para a discussão das tarefas relacionadas com a representação de números irracionais na reta real. O *software* GeoGebra foi utilizado para apresentar as resoluções das questões de uma tarefa - *Construindo números irracionais na reta real*. Para cada questão, considerei todas as possíveis resoluções e fi-las no *software* GeoGebra de modo que cada passo se concretizasse com o premir de um botão. Durante a discussão da tarefa, um aluno iria ao computador e à medida que explicasse à turma cada passo, apresentá-lo-ia premindo o respetivo botão e a resolução seria apresentada no quadro com recurso a um projetor. A decisão de recorrer ao *software* GeoGebra foi feita com base no argumento de que o seu uso facilitaria a construção dos elementos geométricos presentes na resolução da tarefa, como Mózer e Bortolossi (2016) descrevem ao observarem alunos a utilizarem ferramentas tecnológicas num minicurso no âmbito do ensino de números irracionais. Como nas restantes tarefas não se pedia a construção de elementos geométricos, mas para analisar as diferentes representações, operar e comparar números reais, não se considerou a necessidade de recorrer ao *software* GeoGebra. Simultaneamente, o protagonismo da discussão da tarefa caberá principalmente aos alunos, em que apresentam o seu trabalho, as suas dúvidas e questionam-se uns aos outros, desta forma os alunos negoceiam significados matemáticos e constroem um novo conhecimento (Ponte, 2005), investindo assim mais na implementação de um ensino exploratório.

3.5. Tarefas

A unidade de ensino dividiu-se em quatro tópicos: a irracionalidade de um número, a representação de números irracionais na reta real, operações com números irracionais e as relações de ordem com números irracionais. Para o primeiro tópico foram realizadas quatro tarefas e, para os restantes, duas tarefas, em que o trabalho autónomo e a discussão de cada tarefa ocorreram numa aula de 50 minutos.

Para promover a aprendizagem dos números irracionais através do método exploratório do ensino, a elaboração das tarefas foi alvo de grande reflexão. Um dos aspetos a ser refletido de imediato foi o tipo de questões que cada tarefa conteria, pois de acordo com Ponte (2005) pode ser proposta aos alunos a resolução de exercícios, problemas, tarefas de exploração, investigações e projetos. Para Ponte (2005), os exercícios arriscam em empobrecer o caráter desafiante da Matemática e em desmotivar os alunos, e Pólya (1945) sugere que o professor recorra aos problemas para desafiar a curiosidade dos alunos. Pois Pólya (1945) defende que se o aluno "experimentar prazer no estudo da Matemática, ele não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma boa probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: um *hobby*, um instrumento profissional, a própria profissão ou uma grande ambição" (p.2). Não só, mas os problemas também proporcionam aos alunos a oportunidade de consolidar e ampliar os seus conhecimentos, constituindo assim uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática (NCTM, 2007). Tendo em conta que o programa de Matemática do Ensino Básico (2013) traça como objetivo que os alunos consigam resolver problemas, existe então uma oportunidade para que o professor aposte em tarefas que detenham um caráter diferente dos exercícios.

Além de os problemas, as tarefas de exploração também conseguem oferecer oportunidades aos alunos para aprenderem Matemática com compreensão. Segundo Ponte (2005), este tipo de tarefa possibilita a todos os alunos um elevado grau de sucesso, o que contribui para o desenvolvimento da sua autoconfiança, assim como da sua autonomia. Fomentar a autonomia dos alunos também suporta a aprendizagem com compreensão, pois os alunos aprendem mais e melhor quando controlam a sua aprendizagem através da determinação dos seus próprios objetivos e da avaliação do seu progresso, o que por sua vez motiva os alunos a chegarem à resposta de uma questão, a se tornarem flexíveis na exploração de ideias matemáticas e na experimentação de caminhos alternativos (NCTM, 2007).

Perante o método de ensino que pretendi adotar na sala de aula, tentei atribuir alguma prevalência às tarefas de exploração e aos problemas. Segundo Ponte (2005), o uso de diferentes tipos de tarefa é necessário pois cada tipo de tarefa permite alcançar diferentes objetivos curriculares. As tarefas de exploração e os problemas fazem os alunos sentirem-se desafiados, ajuda-os a desenvolverem a sua autoconfiança e o raciocínio matemático (Ponte, 2005). Quaresma e Ponte (2008) destacam como as tarefas de exploração "proporcionam oportunidades importantes de aprendizagem, favorecendo a negociação de significados, a construção de conceitos e a aprendizagem de representações" (p. 225), e perante o papel que as representações desempenham na aprendizagem da noção de número irracional, reforça-se a necessidade do uso deste tipo de tarefa na intervenção letiva. Além disso, ao aprenderem a resolverem problemas em Matemática, os alunos "irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de Matemática" (NCTM, 2007, p.30). Nalgumas tarefas também se incluíram exercícios como objetivo de os alunos consolidarem os seus conhecimentos (Ponte, 2005).

Pretende-se assim com a utilização de diferentes tipos de tarefas chamar os alunos a desempenharem um papel ativo na sua aprendizagem: na interpretação de questões, na representação de informação e na conceção e concretização de estratégias de resolução, as quais os alunos devem ser capazes de justificar ao professor e aos colegas (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015). Desta forma os alunos terão oportunidade de desenvolverem o seu raciocínio, a compreensão da Matemática e a capacidade de a usar em diversas situações (Ponte, Quaresma, Mata-Pereira & Baptista, 2015).

Apresenta-se a seguir uma descrição das tarefas propostas aos alunos durante a unidade de ensino, cujos enunciados se encontram em anexo 3, por ordem de aplicação na sala de aula, incidindo sobre os objetivos curriculares e a sua estrutura.

Tarefa *Números e dízimas*

A tarefa *Números e dízimas* foi proposta aos alunos de modo que começassem por explorar as duas representações de um número racional: a decimal e a fracionária, que estaria subjacente à realização da questão 1. Na resolução desta questão, os alunos seriam capazes de reconhecer que qualquer número na forma de fração é um número racional e que pode ser representado por uma dízima finita ou uma dízima finita periódica, consoante o seu denominador. Esta questão também serviu ao objetivo de que os alunos reconhecessem a ineficácia da calculadora na identificação de uma dízima finita periódica quando um número se representa por uma fração.

A tarefa é composta por quatro questões. A questão 1 teve como objetivo rever e consolidar os conhecimentos dos alunos acerca da dízima finita e da dízima infinita periódica. Com a resolução da questão 2, os alunos seriam capazes de reconhecer que existe um outro tipo de dízima: a dízima infinita não periódica. Na questão 3, é pedido aos alunos que apresentem exemplos de números representados na forma de dízima e que não sejam racionais, servindo para que os alunos concluam que as dízimas infinitas não periódicas representam números que não são racionais. Pretendeu-se assim que os alunos ao estabelecessem conexões com o que fizeram nas questões 1, 2 e 3 e concluíssem que existe um novo tipo de dízima e que representa um número que não é racional. Na questão 4 os alunos apresentariam um esquema que resumisse os tipos de dízimas que conhecessem.

Tarefa *Novos números e um novo conjunto*

A tarefa *Novos números e um novo conjunto* teve como objetivos principais os alunos saberem a noção de número irracional, explorarem as suas várias representações, reconhecerem a existência de um novo tipo de número – o número real e de um novo conjunto de números, o $\mathbb{R}$, e reverem os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

A tarefa é composta por três questões. No início é apresentada uma nota introdutória que apresenta a noção de número irracional, através de uma referência à origem do número $\sqrt{2}$, e quando a raiz quadrada de um número natural é representada por uma dízima infinita não periódica. Com a questão 1, pretende-se que os alunos sejam capazes de reconhecer que a raiz quadrada de um número natural e quadrado perfeito é igual a um número natural; caso contrário esse número é representado por uma dízima infinita não periódica, sendo assim um número irracional.

Depois da questão 1 é apresentada uma segunda nota introdutória em que se apresenta a noção do conjunto $\mathbb{R}$. Com a questão 2, pretende-se que os alunos compreendam as relações entre os números reais: que um número real pode ser racional ou irracional, que um número racional pode ser inteiro ou representado por uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica e que um número irracional é representado por uma dízima infinita não periódica.

Na questão 3 é apresentado um diagrama de Venn em que se pretende que os alunos revejam as noções dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Também se pretende que os alunos explorem a noção do conjunto $\mathbb{R}$, isto é, saibam localizar no diagrama de Venn os números racionais e os números irracionais.

Tarefa *Os números reais*

O objetivo principal da tarefa *Os números reais* consistiu na consolidação dos conhecimentos dos alunos referentes aos números reais. Pretendeu-se que os alunos fossem capazes de identificar a natureza dos números apresentados sob diferentes representações. Esta tarefa constitui um problema, exigindo aos alunos que fizessem uso de capacidades, além de cognitivas, como interpretação e resolução de problemas.

Tarefa *Números reais e conjuntos*

Com a tarefa *Números reais e conjuntos* pretendeu-se concluir o tema referente à irracionalidade de um número. Foi proposta aos alunos com o objetivo de consolidarem os seus conhecimentos quanto às noções dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e de serem capazes de estabelecer a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Tarefa *Números irracionais e a reta real*

Com a tarefa *Números irracionais e a reta real* iniciou-se o segundo tema da unidade de ensino, referente à representação de números irracionais na reta real, especificamente raízes quadradas de números naturais. Também se pretende com esta tarefa que os alunos explorem a densidade dos números reais. A tarefa possui um caráter exploratório pois os alunos são confrontados com questões com vista ao estabelecimento de conexões e à generalização de regras, mas também porque apresenta aos alunos elementos que eles necessitarão para representar um número irracional na reta real.

Na questão é apresentada uma figura na qual está representada a reta real e a sua origem constitui também o centro de três circunferências de raios diferentes, cada uma com um triângulo retângulo incluído.

Na alínea a) da tarefa pretende-se que os alunos determinem os raios das três circunferências. Esta tarefa requer que os alunos estabeleçam várias relações: uma relação entre uma circunferência e o respetivo triângulo retângulo na qual está incluído, e uma relação que permita determinar o seu raio. Como os comprimentos de cada cateto são as únicas dimensões conhecidas, os alunos deverão concluir que a hipotenusa de cada triângulo corresponde ao raio da circunferência e determinar o seu comprimento recorrendo ao Teorema de Pitágoras. Esta alínea requer que os alunos também recordem conhecimentos matemáticos prévios.

Nas alíneas b) e c) os alunos são novamente solicitados a focarem-se na figura do enunciado da tarefa e a estabelecerem relações entre os elementos da figura, mas também com a resolução da alínea a). Na alínea b) pretende-se que os alunos concluam que as abcissas dos pontos T1, T2 e T3 correspondem aos raios das circunferências, não os limitando a outras conclusões igualmente corretas como, por exemplo, indicar os valores das abcissas. Na alínea c), pretende-se que os alunos identifiquem as abcissas dos pontos S1, S2 e S3, cujas abcissas são as simétricas das de T1, T2 e T3, respetivamente. Na alínea d) é pedido aos alunos para que preencham uma tabela sobre as dimensões dos triângulos retângulos e as abcissas dos pontos T1, T2 e T3 e de outros que não estão representados na figura. Com estas alíneas, pretende-se que os alunos concluam que para cada ponto cuja abcissa é um número irracional, existe um triângulo retângulo e uma circunferência, em que o comprimento da hipotenusa do primeiro e o raio da segunda são ambos iguais à abcissa desse ponto.

Na alínea e) pretende-se que os alunos explorem a densidade dos números reais e reconheçam que entre dois números irracionais existem infinitos números racionais.

Tarefa *Construindo números irracionais na reta real*

Com a tarefa *Construindo números irracionais na reta real* pretendeu-se concluir o tema referente à representação de números irracionais na reta real. O objetivo principal desta tarefa é que os alunos aprendam a representar números irracionais na reta real, especificamente as raízes quadradas de números inteiros que não são quadrados perfeitos. Esta tarefa é constituída por uma questão com duas alíneas, em que cada possui uma subalínea.

Nas alíneas a) e b) pretende-se que os alunos representem as raízes quadradas de dois números que são naturais, mas não quadrados perfeitos, na reta real. Para os alunos resolverem estas alíneas, eles precisam de recorrer à tarefa anterior e fazer conexões com as resoluções que apresentaram, portanto é sugerido aos alunos que resolvam esta tarefa em articulação com a tarefa anterior. A representação dos dois números irracionais exige um processo de construção geométrica, sendo assim necessário que os alunos disponham de régua e compasso. Os alunos têm de construir um triângulo retângulo cuja hipotenusa tenha um comprimento igual ao radicando, e de traçar um arco de circunferência do vértice do triângulo, o vértice em que se intersetam a hipotenusa e a altura do triângulo, até à reta real no sentido dos ponteiros do relógio. O ponto de interseção do arco da circunferência e da reta real será onde se encontra na reta real o número irracional pretendido. Os números irracionais propostos para os alunos representarem na reta real também foram escolhidos intencionalmente. Como seria a primeira vez em que os alunos contactavam com a representação de números irracionais na reta real e já tinham sido introduzidos à noção de número irracional e de número real, escolheram-se números irracionais tal que para a construção do triângulo retângulo, os comprimentos dos catetos seriam números naturais.

Com as subalíneas a1) e b1) pretende-se que os alunos explorem outros elementos da construção geométrica para a representação de números irracionais na reta real. Na subalínea a1) é pedido aos alunos para que descubram se o triângulo retângulo utilizado na alínea a) é único. Na alínea b) é pedido aos alunos para que representem na reta real o número $\sqrt{29}$ e depois na subalínea b1) é pedido para que representem outros números: $-\sqrt{29}$, $2+\sqrt{29}$ e $-4+\sqrt{29}$. Escolheu-se o número $\sqrt{29}$ pois além do radicando ser igual à soma dos quadrados de dois números naturais ($29 = 5^2 + 2^2$), não tinha sido incluído na tarefa anterior, desafiando ainda mais os alunos na procura desses dois números naturais. Os números $-\sqrt{29}, 2 + \sqrt{29}$ e $-4 + \sqrt{29}$ foram escolhidos para depois os alunos estabelecerem conexões entre a representação de números irracionais na reta real e as isometrias.

Tarefa *Operações com números irracionais*

Com a tarefa *Operações com números irracionais* inicia-se a lecionação do terceiro tema da unidade de ensino, em que se pretende que os alunos aprendam a operar com números irracionais, especificamente raízes quadradas de números naturais. Esta tarefa é constituída por seis questões.

Nas questões 1 e 2 são abordadas a adição e a subtração com números irracionais. Na questão 1 são apresentados exemplos das operações referidas para depois as efetuarem nas suas alíneas. Na questão 2 pretende-se que os alunos compreendam que não se podem somar e subtrair raízes quadradas quando os seus radicandos são diferentes.

Nas questões 3 e 4 são abordadas a multiplicação e a divisão com números irracionais. A questão 3 foi construída com a mesma estrutura que a questão 1, mas para ser usada para a multiplicação e a divisão. Na questão 4 é apresentada uma igualdade da qual os alunos têm de analisar o seu valor lógico com o objetivo de os alunos reconhecerem que o produto entre duas raízes quadradas é diferente de quando se multiplica um número natural por uma raiz quadrada. Isto é, pretende-se que os alunos reconheçam que $a \times \sqrt{b} \neq \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ (sendo a e b números naturais).

Na questão 5 pretende-se que os alunos reconheçam que o quadrado de uma raiz quadrada é igual ao seu radicando, permitindo ao mesmo tempo que fiquem mais familiarizados com a multiplicação de números irracionais.

No final da tarefa é apresentada uma tabela em que os alunos generalizam as regras operatórias com números irracionais recorrendo ao trabalho que desenvolveram nas questões anteriores. Ao mesmo tempo é requerido aos alunos que definam de forma correta os parâmetros usados e, assim, promover a aprendizagem de uma linguagem matemática mais formal e rigorosa.

Tarefa *Números irracionais: operações e comparações*

Com a tarefa *Números irracionais: operações e comparações* pretende-se concluir a lecionação das operações com números irracionais. A tarefa consiste num problema que dispõe de três alíneas e tem como objetivo principal a aplicação dos conhecimentos dos alunos referentes às operações com números irracionais.

As alíneas a) e c) constituem questões mais diretas pois os alunos compreendem de imediato o que lhes é pedido, logo estas questões servem principalmente para consolidar os conhecimentos e as dificuldades dos alunos em operar com números irracionais. Já a alínea b) possui um caráter mais exploratório promovendo a capacidade dos alunos a nível de resolução de problemas.

Tarefa *Números irracionais e relações de ordem*

Com a tarefa *Números irracionais e relações de ordem* iniciou-se o trabalho na comparação de números irracionais. Esta tarefa teve como objetivos rever como se comparam dízimas finitas e infinitas periódicas e estender a operação às dízimas infinitas não periódicas, assim como explorar a densidade dos números reais. A tarefa é composta por quatro questões.

Na questão 1 são apresentadas cinco alíneas em que os alunos são solicitados a comparar as duas dízimas de cada alínea, levando-os a recordarem os seus conhecimentos de comparação de dízimas e dos tipos de dízimas existentes.

Na questão 2 pretende-se que os alunos sejam capazes de enquadrar um número irracional entre duas dízimas finitas.

A questão 3 possui um caráter mais exploratório que o das alíneas anteriores, pois com ela se pretende que os alunos encontrem dois números racionais e dois números irracionais entre os números que se apresentam. A riqueza desta questão baseia-se na necessidade de os alunos recordarem a noção de número racional e de número irracional, assim como as suas várias representações, que foram trabalhadas ao longo da unidade de ensino. É o caso do número irracional, em que um aluno pode apresentar um número em forma de dízima (infinita não periódica) ou em forma de raiz quadrada.

A questão 4 aborda a densidade de um intervalo de números reais, definindo como objetivo que os alunos reconheçam que entre dois números racionais, ou irracionais, existem infinitos irracionais. Esta questão possui um caráter mais abstrato e exploratório que as questões anteriores. Os alunos podem recorrer às resoluções que apresentaram nas questões anteriores, assim como às das tarefas que lhes foram propostas em aulas passadas, mas que façam uma exploração extensa de estratégias de resolução.

Tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem*

A tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem* conclui a unidade de ensino. Esta tarefa tem como objetivo principal que os alunos comparem números irracionais representados por raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos. Esta tarefa é constituída por duas questões.

Na questão 1 é apresentado um conjunto com números irracionais e são pedidas as resoluções de três alíneas. Na primeira alínea é pedido aos alunos para que coloquem os números do conjunto por ordem crescente e as duas alíneas seguintes pedem aos alunos para que estabeleçam uma regra que enuncie qual a maior de duas raízes quadradas positivas e qual a maior quando são negativas.

Na questão 2 é apresentado um outro conjunto com números irracionais e os alunos são solicitados a fazer uma correspondência entre esses números e os pontos que se apresentam na reta real. Os alunos podem assim recorrer ao processo de estabelecer relações de ordem entre os números de modo que possam fazer essa correspondência.

3.6. Avaliação das aprendizagens

A avaliação constitui um elemento fundamental do processo de ensino e de aprendizagem de qualquer disciplina, assumindo diferentes formas e finalidades. De acordo com o princípio de avaliação para a Matemática Escolar "a avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma Matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores quer para os alunos" (NCTM, 2007, p.25). Portanto, o objetivo de avaliar um aluno não se deve apenas focar na classificação do seu desempenho numa disciplina através de um instrumento ou um conjunto de instrumentos de avaliação. A avaliação de um aluno também se pode basear no seu comportamento nos diversos momentos da aula, como o seu nível de envolvimento e de desempenho no trabalho autónomo e o seu grau de participação na discussão coletiva de uma tarefa. Ao avaliar as respostas de um aluno, o professor pode apresentar observações e indicações de forma a determinar os níveis de competência e ajudar os alunos a compreenderem como definir uma resposta correta e completa (NCTM, 2007). Também as discussões coletivas, "onde os alunos apresentam e avaliam diferentes tipos de resolução de problemas complexos, poderão estimular a sua perceção da diferença entre uma resposta excelente e uma medíocre" (NCTM, 2007, p.24).

De acordo com Pinto e Santos (2006), a avaliação possui três funções: a regulação, em que se recolhe informações úteis para um funcionamento mais eficaz da ação didática; a certificação, com o objetivo de um reconhecimento de aprendizagens ou validação de competências; e a orientação, pretendendo fundamentar um prognóstico sobre a evolução futura de um aluno. Durante as aulas, procurei recorrer a um processo de regulação: após o início do trabalho autónomo, comecei a circular pela sala de aula, questionando os alunos para saber se conseguiam resolver as tarefas atribuídas. Caso os alunos respondessem afirmativamente, pedia-lhes para que explicassem a estratégia de resolução adotada e se fosse apropriada para apresentar uma resolução correta e completa, pedia aos alunos para que regressassem ao trabalho; em caso contrário, pedia aos alunos para que explicassem a sua estratégia, depois, através do questionamento, orientava-os para que percebessem que estava incorreta e, recorrendo ao mesmo método, orientava-os para uma estratégia mais adequada. Este último procedimento também foi adotado caso o aluno não tivesse sido capaz de traçar uma estratégia de resolução. Desta forma, procurei apoiar os alunos com as suas dificuldades, recorrendo ao questionamento como previsto no respetivo plano de aula. Penso que a adoção deste tipo de avaliação é positiva para os alunos, pois com o professor a mostrar um maior empenho em apoiar os alunos na resolução de tarefas cria motivação nos alunos, um elemento contributivo para um ensino efetivo (NCTM, 2007). No âmbito da avaliação das aprendizagens, tive ainda em consideração, durante o trabalho autónomo, não apenas as respostas dos alunos às questões que lhes fazia, mas também o nível de envolvimento na resolução das tarefas. De forma semelhante, aquando dos momentos de discussão coletiva das tarefas, considerei o nível de interesse e de participação dos alunos, para além das respostas que forneciam. Procurei assim variar o número de alunos escolhidos para apresentar as resoluções no quadro ou responder às questões da tarefa, ou questões decorrentes da discussão, para certificar que houvesse o máximo número de alunos a acompanhar a discussão e, assim, os conteúdos lecionados.

No desempenho da função de certificação (avaliação sumativa) foram utilizados dois minitestes, ambos com a duração de 15 minutos. No primeiro miniteste foram avaliadas as aprendizagens dos alunos referentes aos dois primeiros temas da unidade de ensino (irracionalidade de um número e representação de números irracionais na reta real), que foi realizado durante a unidade de ensino após esses temas terem sido lecionados. No segundo miniteste foram abordados os restantes dois temas (operações e comparação com números irracionais), que foi realizado fora do calendário da lecionação da unidade de ensino, justamente quatro dias depois ter sido dada a última aula. As aprendizagens dos números irracionais pelos alunos ainda foram avaliadas num teste realizado no 3º período do ano letivo. Neste teste foram abordados três dos temas da unidade de ensino: a irracionalidade de um número, as operações e as relações de ordem com números irracionais.

3.7. Descrição das aulas

As aulas que lecionei decorreram de 13 a 31 de março de 2017, durante o 2º período do ano letivo, retomando depois no 3º período, entre 20 a 24 de abril do mesmo ano. As aulas de 13, 20, 24, 27, 31 de março e de 24 abril tiveram uma duração de 50 minutos, enquanto as aulas de 16, 23, 30 de março e de 20 abril consistiram em dois blocos de 50 minutos, separados por um intervalo de 10 minutos.

Como eu tinha lecionado três aulas a esta turma no 1º período do ano letivo no âmbito da cadeira Iniciação à Prática Profissional III do Mestrado em Ensino de Matemática e outras que o professor cooperante tinha oferecido a oportunidade para o fazer desde o início do ano letivo, os alunos já me viam como professor.

Os alunos eram assíduos e pontuais, apesar de uma minoria registar ocasionalmente um atraso entre 5 e 10 minutos nalgumas aulas. As aulas da unidade de ensino seguiram o seguinte método de funcionamento: no início eu apresentei uma tarefa, os alunos resolveram-na a pares durante o trabalho autónomo e no final realizou-se a discussão coletiva da tarefa. Cada aluno recebeu um enunciado da tarefa e no final do trabalho autónomo, o professor recolheu uma das resoluções de cada par de alunos para servir de análise no âmbito deste estudo. Ao receberem os enunciados, os alunos envolviam-se na sua resolução e durante o trabalho autónomo, eu circulava pela sala para acompanhar o trabalho dos alunos e apoiá-los com eventuais dificuldades. No final da aula, o professor recolheu a segunda resolução de cada par de alunos para fotocopiar de modo que todos os alunos dispusessem do enunciado de cada tarefa com a sua respetiva resolução e correção. Como a turma não estava habituada a escrever o sumário das aulas, eu decidi não implementar essa prática.

1ª Aula – 13 de março de 2017

O objetivo desta aula era rever a noção de número racional e das suas representações (dízima finita e dízima infinita periódica) e introduzir o conceito de dízima infinita não periódica. Para tal, propus aos alunos a tarefa *Números e dízimas* como ponto de partida para a lecionação dos números irracionais. Penso que a nível de planeamento, deveria ter investido mais na apresentação da tarefa e ter pedido a um aluno para que lesse para a turma a nota recordatória de modo a realçar a sua importância na resolução da tarefa em vez de ter apenas pedido aos alunos para iniciarem a resolução da tarefa logo após terem recebido o enunciado.

Na questão 1, pretendia-se que os alunos reconhecessem quando é que uma fração representava uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica, e a ineficácia da calculadora nesse reconhecimento com algumas frações. Observei que a maior parte dos alunos recorreu à calculadora para representar a fração $\frac{13}{19}$ na forma de dízima em vez de referir que uma fração representa uma dízima finita quando o denominador é igual ao produto de potências de expoentes 2 e 5, visto que aos alunos já tinham sido lecionadas a noção e as representações dos números racionais. Na questão 2, em que se pretendia que os alunos identificassem uma dízima como não finita ou periódica, quase todos os alunos responderam corretamente. Verifiquei que os alunos que apresentaram na sua resolução uma noção correta de dízima finita e de dízima infinita periódica, apesar da linguagem pouco rigorosa utilizada, não mostraram dificuldades na resolução da tarefa e apresentaram respostas corretas a todas as questões. Devo referir que apoiei mais proximamente um par de alunos porque à medida que eu os apoiava nas suas dificuldades ficava com a noção de que eles ficavam mais próximos de apresentar uma justificação completa e correta, o que acabou por acontecer. Ao refletir depois de a aula ter terminado, apercebi-me que tinha dedicado tanto tempo a dois alunos, e que seria necessário a partir daí em diante circular pela sala de modo que a acompanhar o trabalho de um maior número de alunos possível.

Nesta aula optei por prolongar a duração do trabalho autónomo pois quando o tempo previsto para este momento de trabalho terminou, a maior parte dos alunos ainda estava a meio da resolução da questão 2 e os restantes ainda não tinham terminado a questão 3. Desta forma, corria o risco de não ter uma discussão rica da tarefa, pois haveria questões em que muitos alunos não disporiam de uma resolução ou dúvidas para apresentar e assim apenas uma minoria poderia participar ativamente no processo de aprendizagem da noção de número irracional. Tendo em conta a importância deste conceito para a lecionação de conteúdos em futuras aulas reforço assim a necessidade de ter prolongado a duração do trabalho autónomo. Penso que a tarefa esteve adequada pois permitiu aos alunos reverem a noção de dízima finita e de dízima infinita periódica, apesar das dificuldades demonstradas. Creio que a nível de planeamento deveria ter refletido mais e melhor acerca destas dificuldades pois surgiram dúvidas que não tinha previsto e que obrigaram a atribuir mais tempo ao trabalho autónomo e menos à discussão da tarefa.

Com a extensão do tempo dedicado ao trabalho autónomo, a discussão ficou mais reduzida e apenas se discutiu a classificação de uma dízima quando escrita em forma de fração. Na discussão da questão 1, uma aluna invocou a nota recordatória do enunciado da tarefa e um aluno apresentou a justificação prevista na planificação: a fração não podia ser uma dízima finita porque o denominador não era uma potência de 10. Este aluno foi um dos que eu acompanhei mais proximamente durante o trabalho autónomo, mas como eu sabia que estava certa, decidi deixá-lo responder depois de alguns dos seus colegas intervirem, o que considero uma boa decisão pois assim permiti a apresentação e discussão das suas respostas e esclarecimento de eventuais dúvidas e assim uma discussão da tarefa mais rica. Uma das alunas referidas anteriormente contestou a declaração do colega afirmando que 2,5 é uma dízima finita e, no entanto, quando escrita em forma de fração (cinco meios), o seu denominador não é uma potência de 10 e depois foram apresentados alguns exemplos de dízimas finitas e convertidas em fração. Com as intervenções dos alunos que apresentaram esses exemplos durante a discussão e a concordância por parte dos restantes, considero que foram ultrapassadas dificuldades na compreensão da representação de uma dízima finita em forma de fração.

Por um lado, não fiquei satisfeito por a discussão ter focado apenas numa questão da tarefa, mas por outro lado fiquei porque permitiu focar na noção de dízima finita e na sua representação em forma de fração, que foi a origem de muitas dificuldades de vários alunos durante o trabalho autónomo. Também fiquei satisfeito por os alunos terem feito referência a vários tópicos de discussão: a noção de dízima finita, as suas representações na forma de dízima e de fração, e a limitação no uso da calculadora para classificação de uma fração como dízima finita ou infinita periódica. Estas referências também me deixaram satisfeito com a discussão pois mostraram que os alunos têm a capacidade de tornar a discussão de uma tarefa muito rica.

2ª Aula – 16 de março de 2017

Esta aula dividiu-se nos seguintes momentos: conclusão da discussão da tarefa *Números e dízimas* e a apresentação da tarefa *Novos números e um novo conjunto*, seguida pelo trabalho autónomo e da sua discussão. Com esta nova tarefa, pretendeu-se que os alunos aprendessem a noção de número irracional, as suas várias representações e a existência de um novo conjunto numérico $\mathbb{R}$.

Iniciei a discussão da tarefa da aula anterior recordando aos alunos o trabalho realizado na aula anterior e questionando-os quando é que uma fração podia representar uma dízima infinita periódica. A turma mostrou recordar que $\frac{13}{19}$ representava uma dízima infinita periódica e porque o denominador não se podia exprimir num produto de potências de bases 2 e 5, e para me certificar que os alunos ficavam esclarecidos quanto à sua representação decimal e de que o período de uma dízima infinita periódica pode ter um comprimento suficientemente longo ao ponto de não se poder identificar numa calculadora, apresentei-lhes um valor aproximado de $\frac{13}{19}$ com 38 casas decimais. Ao perguntar-lhes se era uma dízima infinita periódica responderam afirmativamente e souberam identificar o respetivo período. Questionando os alunos sobre outros exemplos, eles mostraram saber reconhecer que um número racional pode ser representado por um número inteiro ou por uma dízima finita ou por uma dízima infinita periódica, e depois eu elaborei um esquema que resumisse os diferentes tipos de representações de um número racional. Na discussão da questão 2, acrescentei mais casas decimais à dízima 0,121221222122221… e os alunos concordaram que não era periódica porque não seguia um padrão de repetição. Ao perguntar à turma se o número era racional, uma das alunas invocou a nota recordatória da tarefa *Números e dízimas* e, depois de alguns alunos também a recordarem e outros a consultarem, e percorrerem o esquema que tinha sido escrito no quadro acerca das representações de um número racional, os alunos concluíram corretamente que o número não era racional. Na apresentação da resposta à questão 3 os alunos selecionados pelo professor apresentaram respostas corretas (4,36578245… e 4,363663666366663…), ainda escrevi no quadro um terceiro exemplo (0,1234567…) para que os alunos conhecessem um padrão de formação diferente da dízima apresentada no enunciado e ficassem a saber como escrever dízimas infinitas não periódicas, o que os alunos depois mostraram compreender. Considero assim que os alunos souberam reconhecer a existência de um novo tipo de dízima, e constituindo desta forma aprendizagem. Optei por não discutir a última questão que pedia um esquema que resumisse os diferentes tipos de dízimas lecionados, pois o tempo previsto para a discussão já tinha sido ultrapassado e na nova tarefa, os alunos iriam resolver uma questão semelhante. Fiquei satisfeito com a forma como conduzi a discussão porque penso, com base no que foi mencionado, que os alunos ficaram esclarecidos sobre as caraterísticas dos tipos de dízimas e as diferentes representações de um número racional.

Para não ocorrer a mesma situação da aula anterior, pedi a dois alunos para que lessem a nota introdutória da tarefa proposta para esta aula. Enquanto acompanhava o trabalho dos alunos durante o trabalho autónomo, verifiquei que alguns recorreram à nota introdutória, o que os ajudou a identificar quais eram os números racionais entre uma sucessão de raízes quadradas apresentada. Na questão 2 os alunos envolveram-se na resolução da questão e mostraram compreender que um número real é um número racional ou um número irracional, mas mostraram dificuldades em reconhecer que a união do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais é o conjunto dos números reais. Na questão 3, em que se pretendia que os alunos identificassem o conjunto numérico a que os números apresentados pertenciam, muitos alunos resolveram as alíneas com bastante facilidade, mas alguns demonstraram dificuldades por não recordarem conhecimentos lecionados em anos anteriores (o significado do conjunto $\mathbb{N}$, se o zero é um número natural).

No momento da discussão da questão 1 da tarefa, em que se pedia para estabelecerem uma regra para decidir se a raiz quadrada de um número natural é um número racional, optei por dar a palavra a um aluno que sabia que apresentaria uma resposta correta e que fosse semelhante à da planificação para atingir os objetivos curriculares delineados. Depois do aluno escolhido ter apresentado a sua resposta, eu destaquei os radicandos dos números selecionados na alínea 1.1., o que levou os alunos a concordarem com a regra que o colega apresentou, constituindo aprendizagem de quando $\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ é um número irracional. Por um lado, penso que a decisão não foi bem tomada pois não aproveitei a oportunidade de criar uma discussão rica e na questão que suscitou maiores dificuldades na turma, mas por outro lado creio que os alunos acabaram por compreender a regra e pôde-se poupar tempo para a discussão do resto da tarefa. Na discussão da questão 2, os alunos mostraram pelas suas respostas e pelo esclarecimento de dúvidas aos colegas que tinham recorrido à síntese das várias representações de um número racional que tinha sido feita na discussão da tarefa da aula anterior. Nas suas respostas durante a discussão e o trabalho autónomo, os alunos revelaram conhecimento sobre o conjunto $\mathbb{R}$ e as relações entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Como já havia pouco tempo para a discussão da última alínea, optei por escolher alunos para apresentarem as suas respostas referentes a alguns números, que eu já sabia que estavam corretas, sem dar lugar à discussão. Mas em relação aos restantes números, a discussão teve lugar e assim, alguns alunos mostraram serem capazes de inserir os números apresentados no respetivo conjunto. No entanto, evidenciaram-se algumas dificuldades quando um aluno identificou π como pertencendo a $\mathbb{Q}$ e alguns alunos não souberam identificar $\sqrt{9}$ e $\frac{28}{7}$ como números que pertencem ao conjunto $\mathbb{N}$. Penso que alguns alunos compreenderam a resolução apresentada, mas também não creio que foi possível aferir se todos ficaram esclarecidos, visto que a campainha da escola já tinha tocado. Apercebi-me no final da aula que procurei mais em concluir a discussão da tarefa do que garantir que os alunos compreendessem a que conjunto cada número pertencesse, mas como sabia de antemão que os alunos fariam outra tarefa acerca dos conjuntos numéricos não creio que a minha decisão tenha sido mal tomada.

Penso que esta tarefa foi adequada visto os alunos se mostrarem envolvidos na sua resolução e, com base no que foi mencionado acima, também lhes permitiu rever as representações do número racional, explorar a noção de número irracional e rever os conjuntos numéricos.

3ª Aula – 20 de março de 2017

No dia 17 de março, os alunos realizaram um teste de avaliação e é prática comum do professor alterar a distribuição dos alunos na sala na aula imediatamente seguinte. Como quase todos os alunos chegaram depois do toque e ainda teve ser feita a nova distribuição dos alunos pelos lugares, a aula começou depois do que previsto.

Para esta aula foi proposta a tarefa *Os números reais* para os alunos consolidarem os seus conhecimentos sobre a natureza dos números e também para reconhecerem a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Esta tarefa permitiu aos alunos analisarem a natureza de números sob diferentes representações e desenvolverem conhecimento sobre cada um dos conjuntos numéricos. Sendo a tarefa um problema, foi solicitado aos alunos que recorressem às suas capacidades de interpretação, o que fez os alunos sentirem-se mais desafiados.

Durante o trabalho autónomo, observei que alguns alunos tentaram reescrever os números apresentados sob outra representação e que também consultavam as tarefas que tinham realizado nas aulas anteriores. Alguns alunos mostraram dificuldades pois não recordavam o que representavam os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, nem quando a raiz quadrada de um número natural representava um número racional ou irracional ou a representação de números racionais em forma de dízima. Para apoiar esses alunos, questionei-os sobre possíveis formas de reescrever os números em diferentes representações, como por exemplo a fração $\frac{\sqrt{36}}{3}$. No caso de $\sqrt{5}$ apelei para que recordassem o trabalho que realizaram na tarefa anterior.

Fiquei satisfeito com o meu papel no momento de discussão coletiva na medida que solicitei a participação de alunos que não se costumam oferecer para apresentar a sua resolução. No entanto, ao refletir depois do final da aula, notei que continuo a dar a palavra a alunos que se oferecem para responder ou quando ninguém se oferece, tendo a recorrer a alunos que têm tido um bom desempenho nas avaliações feitas ao longo do ano escolar. Recordando que também recorri a essa estratégia na aula anterior, penso que o fiz por questões de tempo, mas vejo que assim não estou a dar oportunidade aos alunos com mais dificuldades para se manifestarem e assim ajudá-los a melhorar as suas aprendizagens. Algumas das dúvidas que os alunos apresentaram contribuíram para o regresso à discussão da tarefa da aula anterior, especificamente à das relações entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e os números que os constituem. Apesar de ter restado pouco tempo para esta discussão, as respostas dos alunos permitem concluir que eles reconheceram que $\mathbb{Z}$ é a reunião de $\mathbb{N}$ e dos números inteiros não positivos, que $\mathbb{Q}$ é a reunião de $\mathbb{Z}$ e dos números fracionários e que $\mathbb{R}$ é a reunião de $\mathbb{Q}$ e dos números irracionais, mas após a conclusão da aula receei que esta aprendizagem estivesse mais reservada para os alunos que participaram na discussão.

Em termos de planeamento, penso que a tarefa esteve adequada pois conteve todas as representações de números racionais e irracionais que os alunos trabalharam em aulas anteriores e permitiu um grande envolvimento deles na resolução da tarefa.

Creio que devia ter iniciado a aula de modo a concluir a discussão da tarefa da aula anterior visto que durante o trabalho autónomo e a discussão surgiram dúvidas por parte de alguns alunos relativas às relações entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e os números que os constituem. Em aulas anteriores em que os lugares dos alunos eram redistribuídos, eu observei que os alunos tendem a ficar um bocado mais agitados ao se adaptarem aos novos colegas, e que se eles são postos a trabalhar de imediato essa agitação tende a diminuir. Mas como não posso garantir que o oposto aconteceria se tivesse começado com a discussão da tarefa da aula anterior e que seria mais vantajoso para aprendizagem dos alunos, mantenho a convicção de que teria sido melhor fazer as alterações ao planeamento referidas.

4ª Aula – 23 de março de 2017

A aula iniciou-se com a apresentação da tarefa *Números reais e conjuntos*, do trabalho autónomo e da sua discussão com o objetivo de consolidar os conhecimentos dos alunos das relações entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e os números que os constituem. Depois foi proposta a tarefa *Números irracionais e a reta real* como ponto de partida para os alunos aprenderem a representar números irracionais na reta real, seguida do trabalho autónomo dos alunos.

Durante o trabalho autónomo da tarefa *Números reais e conjuntos* observei que muitos alunos não manifestaram dificuldades em identificar os conjuntos a que os números apresentados pertenciam, apenas em recordar o que os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ e $\not\subset$ representavam e, portanto, interrompi o trabalho autónomo para interpelar a turma e optei por escrever o significado dos símbolos no quadro.

Para a discussão tinha feito uma lista de alunos que não costumam participar e observei o trabalho que desenvolveram no trabalho autónomo para depois decidir quais e se os selecionaria. No final do trabalho autónomo, verifiquei que todos os alunos da lista que tinha redigido tinham realizado a tarefa e respondido corretamente a quase todas as questões, portanto selecionei-os. Na discussão da tarefa, solicitei, de forma individual, os alunos e além de apresentarem a resposta, eu perguntava a alguns para a justificar. Os alunos solicitados apresentaram as suas respostas e procuravam justificá-las quando lhes era pedido. Esses mesmos alunos procuraram participar no resto da discussão, manifestando vontade de responder a outras alíneas e expondo as suas dúvidas, reforçando assim a minha decisão no processo de seleção dos alunos para a discussão da tarefa. Com base nas intervenções dos alunos pude observar que compreenderam a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, e que souberam identificar os números que pertencem a cada um desses conjuntos. Tendo em conta que como a tarefa se propunha para fazer uma consolidação de conhecimentos de forma breve e os alunos se mostraram envolvidos e como penso que os objetivos delineados foram cumpridos, penso que a tarefa foi adequada e que foram assim constituídas aprendizagens com os alunos a saberem identificar os conjuntos que números sob diferentes representações pertencem.

Finda a discussão, foi apresentada aos alunos a tarefa *Números irracionais e a reta real*. O enunciado continha uma figura que considerei de grande sofisticação e desafio para os alunos, tendo eu pedido a um dos alunos para que explicasse pelas suas palavras o que observava na figura. Destaquei uma caraterística da figura que o aluno referiu: que os triângulos eram retângulos, de modo a que os alunos associassem o Teorema de Pitágoras que se revelaria necessário para a resolução das questões da tarefa. Tendo em conta que muitos alunos revelaram diferentes tipos de dificuldades na resolução da alínea a), cuja resolução era necessária para a resolução das alíneas b), c) e d), penso que o desafio da tarefa pode ter estado acima do que se poderia esperar da maior parte dos alunos da turma e que poderia ter sido ajustada de modo a reduzir o grau de dificuldade, mas mantendo do seu caráter exploratório e contemplando os objetivos curriculares traçados no planeamento.

Nem todos os alunos resolveram as alíneas b), c) e d) pois além das dificuldades que revelaram, o tempo que necessitaram para resolver a alínea a) não os permitiu dispor de muito mais para apresentar uma resolução. Durante o trabalho autónomo foi necessário interromper a aula para mudar de sala. Perante as diversas dificuldades de muitos alunos na resolução da primeira alínea e de ainda estarem na alínea b) quando o tempo previsto para o trabalho autónomo já tinha terminado, decidi disponibilizar mais tempo aos alunos para resolverem a tarefa, de forma a garantir que houvesse mais alunos a apresentarem resoluções alternativas ou dúvidas na discussão

Na discussão, tentei dar a palavra a todos os alunos, quer aqueles que costumam participar como os que participam menos, e dei-lhes oportunidade para apresentarem as suas várias respostas e dúvidas. Na segunda alínea houve uma variedade de respostas apresentadas, o que permitiu enriquecer a discussão e, ao mesmo tempo, demonstrar as diversas capacidades transversais dos alunos. Tendo em conta as respostas maioritariamente corretas nas resoluções, penso que os alunos foram capazes de relacionar a abcissa do ponto com a hipotenusa do triângulo e o raio da circunferência.

Em relação ao planeamento, creio que podia ter investido mais na previsão de dificuldades por parte dos alunos na alínea a) durante o trabalho autónomo, visto que alguns alunos apresentaram questões relativas a conhecimentos que tinham sido considerados como adquiridos previamente no planeamento. Também acho que haveria outras medidas que poderiam ter permitido aos alunos realizar a tarefa com mais facilidade: poderia ter investido mais na apresentação da tarefa e ter orientado os alunos de tal forma que eles concluíssem que o Teorema de Pitágoras seria necessário para a tarefa. Também seria útil ter havido, antes do trabalho autónomo, uma pequena discussão com os alunos sobre o raio da circunferência para que os alunos concluíssem que é possível traçar vários raios numa circunferência, facilitando assim os alunos na identificação dos raios das circunferências da tarefa.

5ª Aula – 24 de março de 2017

Esta aula dividiu-se em três momentos: a conclusão da discussão da tarefa da aula anterior, a apresentação da tarefa *Construindo números irracionais na reta real*, seguida do trabalho autónomo dos alunos. Nesta tarefa os alunos trabalharam o processo de construção geométrica para representar números irracionais na reta real, para o qual necessitariam de recorrer ao trabalho que desenvolveram na tarefa *Números irracionais e a reta real* da aula anterior.

Na discussão da última questão da tarefa da aula anterior, em que se pedia para descobrir se havia infinitos números racionais entre dois irracionais, solicitei um voluntário para apresentar uma resposta à questão, mas apenas dois alunos puseram a mão no ar. Procurei envolver mais alunos, recordando-lhes o trabalho em tarefas anteriores mas só mais um aluno se ofereceu, apresentando dois exemplos, que eu depois representei na reta real. Um dos dois alunos iniciais ofereceu-se para responder à questão, tendo ido ao quadro expô-la, o que levou os restantes alunos a participarem na discussão, expondo questões e dúvidas. Para garantir que todos reconheciam a existência de infinitos números racionais entre dois irracionais, recorri a exemplos e apercebi-me da contribuição que a reta real pode ter na comparação de números reais. Apesar de a turma estar menos participativa que as aulas anteriores, pela anuência dos alunos perante a explicação que lhes apresentei penso que acabaram por reconhecer que entre dois números irracionais existem infinitos racionais.

Ao ser apresentada a tarefa seguinte, eu destaco aos alunos o que está escrito no início do enunciado: que é necessário terem em consideração o trabalho que realizaram na tarefa *Números irracionais e a reta real*. Durante o trabalho autónomo, verifiquei que os alunos recorreram às resoluções dessa tarefa para os apoiar na representação de $\sqrt{13}$ na reta real, pedida na alínea a), mas que alguns mostraram dificuldades em identificar a informação pretendida para a resolução da nova tarefa. Para apoiar esses alunos, eu pedi-lhes para recorrerem à figura da tarefa *Números irracionais e a reta real* e, através do questionamento, os alunos conseguiram relacionar de forma correta a abcissa do ponto correspondente ao número irracional que queriam representar na reta real com o raio da circunferência e a hipotenusa do triângulo retângulo, e a maioria representou de forma correta o número $\sqrt{13}$ na reta real. Na alínea b) da tarefa era pedida a representação de $\sqrt{29}$ na reta real, e os alunos já não demonstraram as dificuldades que apresentaram na alínea a), à exceção da procura das dimensões do triângulo que necessitariam, visto que as de $\sqrt{13}$ se encontravam na tarefa da aula anterior. Quando o tempo previsto para o trabalho autónomo terminou, muitos dos alunos tinham acabado de concluir a alínea a) e não tinham explorado ainda as alíneas seguintes, portanto decidi dar-lhes mais tempo que acabou por se estender até ao final da aula, deixando a discussão para a aula seguinte. Durante o trabalho autónomo, eu observei que os alunos tiveram dificuldades em resolver as alíneas a) e b) devido à escala em ambas as figuras: na reta estavam indicados os números 0 e 1, e alguns alunos não conseguiam depois localizar corretamente os restantes números (na alínea a), por exemplo, escreveram o 2 na reta onde deveria estar o 2,5). Portanto penso que teria sido mais benéfico para os alunos se a reta de ambas as figuras da tarefa estivesse mais completa.

Apesar de não ter havido discussão da tarefa na aula, penso que alguns alunos compreenderam o processo de representação de números irracionais, especificamente raízes quadradas de números naturais, na reta real. Todos os alunos procuraram apoio junto do professor durante o trabalho autónomo, mas assim que eram apoiados eles mostraram compreender o que era necessário fazer para concluir a tarefa. Mas dos alunos que afirmei que compreenderam o processo de representação de números irracionais, eu verifiquei que quando tentavam resolver a alínea b) utilizaram o mesmo processo a que recorreram na alínea a).

Penso que a tarefa esteve adequada aos seus objetivos pois os alunos mostraram-se envolvidos e, apesar das dificuldades, alguns desenvolveram conhecimentos sobre a representação de números irracionais na reta real. No entanto, creio que uma tarefa que requer conhecimento de vários tópicos matemáticos, mesmo que sejam considerados conhecimentos prévios, exige mais reflexão por parte do professor, tanto a nível de dificuldades dos alunos como a nível de tempo para a resolução e discussão de tarefas.

6ª Aula – 27 de março de 2017

Nesta aula foi discutida a tarefa *Construindo números irracionais na reta real* com a turma com o objetivo de consolidar a aprendizagem do processo de construção geométrica para representar números irracionais na reta real. Tendo em conta as dificuldades que alguns alunos mostraram durante o trabalho autónomo nas resoluções que fizeram, assim como muitos alunos não terem apresentado uma resposta a algumas das alíneas, decidi na planificação que seria mais vantajoso para os alunos deixar que esta aula se focasse exclusivamente na discussão da tarefa. Tendo em conta as várias construções geométricas que a tarefa exigia e também para minimizar quaisquer eventuais dificuldades de visualização por parte dos alunos, incluí a utilização do *software* GeoGebra na planificação. De modo a garantir uma maior participação da turma na discussão, os comandos do *software* GeoGebra foram programados de modo a serem utilizados pelos alunos com a orientação do professor.

Na preparação da aula, analisei as resoluções dos alunos que tinham sido recolhidas na aula anterior. Dessa análise procurei selecionar alunos que tivessem apresentado uma resposta correta e completa para a exporem à turma, pois achei que, além da poupança de tempo, estes alunos seriam capazes de explicar as suas resoluções e também esclarecer quaisquer eventuais dúvidas. Para a discussão criei comandos no *software* GeoGebra tal que os alunos pudessem utilizar mediante a minha orientação e que expusessem de forma faseada o processo de resolução levado a cabo pelos alunos selecionados na apresentação das suas respostas às questões da tarefa. Com o recurso a este *software* e também com a ida dos alunos que, selecionei para irem ao quadro e apresentar as suas resoluções, observei que a turma estava mais concentrada na discussão. Após cada aluno ter feito a sua apresentação, eu sintetizava as principais ideias de modo a que os restantes as compreendessem. Na representação dos números $\sqrt{13}$ e $\sqrt{29}$ na reta real todos os alunos concordaram com as resoluções apresentadas visto que no trabalho autónomo da aula anterior tinham feito semelhantes, e considero assim que os alunos constituíram aprendizagens na representação de raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos na reta real. À medida que se avançava na discussão das alíneas, fui colocando questões aos alunos que requeriam a realização de conexões com o que tinha sido discutido em alíneas anteriores. Por exemplo, quando se fez a discussão da última alínea, onde se pedia para fazer a representação na reta real dos números $-\sqrt{29}$, $2+\sqrt{29}$ e $-4+\sqrt{29}$, perguntei aos alunos quais as transformações geométricas que permitiriam obter essa representação, levando assim os alunos a rever os seus conhecimentos de isometrias.

Considerando o que observei no trabalho autónomo realizado na aula anterior e na discussão realizada nesta aula, penso que os alunos compreenderam a construção geométrica para representar um número irracional na reta real. O recurso ao *software* GeoGebra ajudou na discussão da tarefa na medida em que os alunos se mostraram mais interessados na resolução da tarefa atendendo às suas potencialidades de visualização, contribuindo também para a consolidação de aprendizagens.

7ª Aula – 30 de março de 2017

Esta aula iniciou-se com a apresentação da tarefa *Operações com números irracionais*, seguida do trabalho autónomo e sua discussão. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos aprendessem a efetuar as seguintes operações com números irracionais: adição, subtração, multiplicação, divisão e potência. Solicitei a um aluno para ler a frase introdutória da tarefa para os enquadrar no que seria o foco da tarefa. Na tarefa estavam apresentados exemplos das quatro operações referidas com números irracionais e, portanto, frisei aos alunos que os analisassem pois se revelariam fulcrais para a resolução das questões da tarefa. Nesta aula, os alunos encontravam-se mais agitados do que nas aulas anteriores, revelando alguma indisposição para trabalhar autonomamente na tarefa e participar na respetiva discussão. Essa agitação obrigou uma maior monitorização da minha parte durante a aula e, juntamente com as dificuldades que se verificaram na resolução da tarefa e na sua discussão, contribuiu para o prolongamento dos tempos previstos para o trabalho autónomo e para a discussão da tarefa. Também diminuiu o tempo previsto para o trabalho autónomo da tarefa *Números irracionais: operações e comparações* e o adiamento da sua discussão para a aula seguinte.

No trabalho autónomo, observei que nas questões (1 e 3) em que se apresentavam os exemplos referidos os alunos foram capazes de efetuar as operações com números irracionais que lhes eram solicitadas na tarefa, mas mostraram dificuldades de interpretação nas questões 2 e 4 devido ao seu caráter exploratório e exigirem um maior grau de interpretação. Também apurei que muitos dos alunos foram capazes de completar a tabela apresentada no final da tarefa, em que tinham de generalizar as operações com raízes quadradas.

Na seleção de alunos para se deslocarem ao quadro e apresentarem resoluções optei por dar prioridade a alunos que se tivessem oferecido e revelado dificuldades com a disciplina, envolvendo-os mais no processo de ensino-aprendizagem do número irracional. Na discussão das resoluções apresentadas no quadro também segui o método descrito anteriormente para a seleção de alunos. Caso esses alunos não se oferecessem selecionava outros que o fizessem. Sempre que possível, direcionei questões aos alunos de modo a que, com as suas respostas, fosse possível sintetizar a matéria. Para concluir a discussão das questões 1 a 4, interpelei os alunos por meio de questões de modo a que concluíssem que a adição e a subtração entre raízes só são possíveis quando os radicandos são iguais. Com base nas respostas maioritariamente corretas nas resoluções das questões 1 e 3, considero que os alunos aprenderam a somar, a subtrair, a multiplicar e a dividir números irracionais. Muitos alunos, na discussão da questão 5, evidenciaram terem compreendido como se calcula o quadrado de uma raiz quadrada: nenhum aluno questionou a transformação do quadrado do número no produto desse número por ele próprio. Muitos alunos compreenderam a realização da multiplicação da raiz quadrada por ela própria, contudo outros sugeriram ainda como alternativa ao produto escrever apenas o radicando. Na discussão da tabela os alunos concordaram com as generalizações apresentadas e quando foi necessário definir os parâmetros utilizados eu perguntei à turma que números os radicandos poderiam ser e os alunos responderam corretamente que não podiam ser negativos na adição, subtração, multiplicação e na potenciação, e que na divisão o numerador também não podia ser negativo, mas o do denominador tinha que ser positivo. Para a generalização da adição de raízes quadradas nenhum aluno se manifestou com a que foi apresentada apesar de estar incorreta, mas recorrendo a exemplos apresentados por alguns alunos, a turma depois concluiu qual a resposta correta. O tempo previsto para a discussão excedeu vinte minutos. Além da agitação imprevista dos alunos, penso que também se deveu a algumas dificuldades da minha parte em gerir as intervenções dos alunos ao exporem as suas dúvidas. Isto é, não me apercebo que os alunos apresentam dúvidas chegam a consumir tanto tempo ao ponto de que a maioria dos restantes alunos já não mostra interesse na discussão, e que mais vale eu discutir a sós com o aluno no final da discussão. Dessa forma, o aluno fica esclarecido e garanto o interesse dos restantes alunos na discussão das outras questões da tarefa ainda por discutir. É uma habilidade que necessita ser melhorada, tendo em conta a sua importância para gestão da sala de aula e, assim, para a minha formação de professor.

Terminada a discussão da tarefa *Operações com números irracionais*, verifiquei que restavam pouco mais de 10 minutos para a aula terminar. Decidi, no entanto, que os alunos trabalhariam a tarefa *Números irracionais: operações e comparações* nesta aula, pois apenas restava mais uma aula destinada à unidade de ensino até o fim do período. Tendo em conta que estava previsto no planeamento da unidade de ensino concluir a lecionação das operações com números irracionais nessa aula, mas que poderia ser insuficiente para o trabalho autónomo e discussão da nova tarefa e que os alunos ainda teriam de realizar miniteste, penso que estes motivos foram suficientes para tomar a decisão referida. Ao receberem os enunciados da nova tarefa, eu informei os alunos que era um seguimento do trabalho que tinham desenvolvido na tarefa anterior. Tendo em conta que esta tarefa foi apresentada a pouco mais de 10 minutos do final da aula, alguns dos alunos não se mostraram muito envolvidos na sua resolução. Durante o trabalho autónomo, alguns alunos mostraram compreender o que lhes era pedido, mas também dificuldades, principalmente em calcular o comprimento do segmento [*BC*]: os alunos afirmaram que para calcular o dobro de um número, tinha-se de elevar esse número ao quadrado, e não multiplicar por 2. Mas assim que lhes perguntava como se calculava o dobro de um número, os alunos apresentavam de imediato a resposta correta.

8ª Aula – 31 de março de 2017

Esta aula iniciou-se com a continuação do trabalho autónomo destinado à resolução da tarefa *Números irracionais: operações e comparações*. Com esta tarefa pretendeu-se prosseguir na lecionação das operações com números irracionais no contexto de um problema para ao mesmo tempo explorar outras capacidades transversais dos alunos, como a interpretação e a resolução de problemas. Durante este momento da aula, notei que os alunos se mostraram bastante envolvidos na resolução da tarefa e menos agitados que na aula anterior.

Durante o trabalho autónomo observei que alguns alunos mostraram saber as regras de operações com raízes quadradas, mas outros evidenciaram o oposto e para os apoiar pedi-lhes para que recordassem o trabalho realizado na aula anterior ou que fossem consultá-lo. Verifiquei depois que os alunos reviram as suas resoluções da tarefa *Operações com números irracionais* e ao aperceberem que as operações que efetuaram nesta tarefa eram as mesmas que as da nova tarefa, os alunos avançaram na resolução da tarefa.

Como os alunos iriam fazer miniteste nos últimos quinze minutos da aula e foram atribuídos mais cinco minutos para o trabalho autónomo, a discussão durou menos de dez minutos e focou-se apenas na primeira alínea da tarefa. Eu solicitei a um aluno para apresentar a sua resolução e escolhi outro para que fosse indicar na figura (projetada no quadro) o percurso cuja distância era pedida na primeira alínea da tarefa. Durante a discussão alguns alunos expuseram as suas dúvidas quanto ao raciocínio por detrás da resolução, mas não em relação à resolução em si. Penso que a discussão do resto da tarefa teria contribuído para as aprendizagens dos alunos a nível de interpretação e resolução de problemas visto que havia alíneas compostas por várias etapas de resolução. Ao mesmo tempo, penso que a discussão das restantes alíneas da tarefa permitiria diminuir ou colmatar quaisquer possíveis dúvidas que os alunos ainda possuíam acerca das regras operatórias das raízes quadradas. Com base nestes motivos creio que a tarefa estaria adequada aos objetivos traçados.

Nesta aula realizou-se um miniteste com o objetivo de avaliar os conhecimentos dos alunos em relação aos dois primeiros temas da unidade de ensino: irracionalidade de um número e representação de números irracionais na reta real. Para além de dois testes de avaliação os alunos realizam cinco minitestes ao longo de cada período do ano letivo, em que cada dura entre 15 a 20 minutos. Como houve miniteste e esta foi a última aula do 2º período, seria também a última aula destinada à lecionação das regras operatórias das raízes quadradas e não se considerou vantajoso os alunos retomarem estes conteúdos no 3º período. Confrontado com esta situação, e recordando que nas aulas anteriores os tempos previstos para o trabalho autónomo e para a discussão de tarefas foram sempre excedidos, vejo que há uma necessidade da minha parte em refletir sobre como gerir a aula de modo que os tempos para estes momentos possam ser cumpridos quando não há necessidade de os estender. Apesar de ter havido situações em que o acréscimo desses tempos foi benéfico para os alunos, penso que se isso sucede constantemente, mesmo que haja necessidade, tem de haver alguma mudança por parte do professor, pois mostra assim que existem elementos da sala de aula que ele desconhece ou do qual não considera quando planeia as suas aulas.

9ª Aula – 20 de abril de 2017

Esta aula foi a primeira de Matemática no 3º período do ano letivo e alguns dos alunos mostraram-se um pouco agitados. Prevendo esta situação eu tinha distribuído os enunciados da nova tarefa, *Números irracionais e relações de ordem*, pelas carteiras dos alunos antes do início da aula e assim que os alunos se foram sentando, informei-lhes que já dispunham de trabalho para fazer na aula e começaram de imediato a resolução da tarefa. Após o trabalho autónomo e discussão desta tarefa, previu-se na planificação da aula que também seria trabalhada e discutida uma nova tarefa: *Números irracionais, operações e relações de ordem*. O trabalho autónomo e a discussão desta tarefa tiveram, no entanto que ser adiadas devido à agitação dos alunos e às suas dificuldades durante o trabalho autónomo e a discussão da tarefa *Números irracionais e relações de ordem*.

Durante o trabalho autónomo, observei que os alunos se mostraram capazes de comparar números em forma de dízima e verifiquei que muitos não recorriam à ajuda do professor tanto como era habitual e quando eu os questionava como decorria o trabalho, respondiam que não havia dificuldades. Os alunos também se revelaram capazes de enquadrar um número irracional entre duas dízimas finitas. No entanto, verifiquei que os alunos mostraram dificuldades em comparar dízimas quando uma delas era infinita periódica e também na resolução da questão 3, na qual tinham de encontrar números racionais e números irracionais entre dois números reais. Alguns alunos não recordavam a noção de número racional e de número irracional, apesar de recordarem algumas das suas representações. Com o recurso ao questionamento, os alunos foram capazes de apresentar uma resposta completa ou definir uma estratégia de resolução. Quando o tempo previsto para o trabalho autónomo tinha terminado, verifiquei que grande parte dos alunos ainda não tinha iniciado a resolução da questão 4, portanto decidi atribuir-lhes mais uns minutos para concluírem a resolução da tarefa. Após o prolongamento do trabalho autónomo muitos alunos ainda não tinham concluído a tarefa, e tendo em conta que alguns mostraram dificuldades durante o trabalho autónomo, outros que se encontravam num estado de agitação que, a meu ver, não os conduziria a envolverem-se ativamente na resolução da questão 4 e de que ainda se pretendia realizar e discutir uma segunda tarefa, decidi dar início à discussão.

Durante a discussão da questão 1 houve alunos que apresentaram dúvidas relativas a conhecimentos que no plano de aula tinham sido considerados como prévios: a comparação de números negativos e a comparação de dízimas finitas. Eu pedi a alunos para se deslocarem ao quadro para esclarecerem os colegas e também estimulassem uma participação mais ativa dos colegas na discussão. Na discussão das questões 2 e 3 os alunos não contestaram as respostas, mas alguns expuseram dúvidas que permitiram rever conteúdos da unidade de ensino lecionados em aulas anteriores. Um dos motivos pelo qual foi necessário estender a discussão da tarefa foi quando se discutiam as respostas apresentadas à alínea e) da questão 1 e da questão 4, pois constituem questões de caráter exploratório. Com base no que foi referido sobre o trabalho autónomo e a discussão, os alunos mostraram evidências de terem compreendido a comparação de dízimas. No entanto não fiquei totalmente satisfeito com a discussão pois penso que seria possível aproveitá-la de outras formas mais vantajosas, como a questão 3 que permitiria rever as representações dos números racionais e dos números irracionais. Esta aula, juntamente com outras, evidenciou a existência de vários fatores que, à partida parecem irrelevantes, mas que podem comprometer o funcionamento da aula e, consequentemente, a realização de aprendizagens, como sejam o espaço temporal das aulas e a personalidade do aluno. Estes elementos mostram que a otimização de resultados do processo de ensino-aprendizagem não consiste apenas em planear quais os conteúdos programáticos a lecionar, ou como, mas também exige ao professor conhecer a sua turma e prever os tipos de comportamentos que podem surgir dos seus alunos em qualquer momento da aula. Uma prática que pretendo adotar de forma séria quando me tornar professor.

10ª Aula – 24 de abril de 2017

Nesta aula foi proposta a tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem* que tinha como objetivo principal a comparação de números irracionais na forma de raiz quadrada. Antes do início da aula distribuí os enunciados da nova tarefa pelas carteiras dos alunos e assim que estes se sentaram, eu informei-os que já dispunham de trabalho para fazer na aula. Tendo em conta o objetivo da tarefa foi anunciado aos alunos que não poderia recorrer à calculadora para a resolver.

Durante o trabalho autónomo, observei que muitos dos alunos se mostraram capazes de comparar raízes quadradas de números naturais. Em relação aos alunos que revelaram dificuldades, eu pedi para pensarem num valor arredondado das respetivas raízes quadradas e que depois fizessem a comparação. Penso que esta estratégia de apoio às dificuldades dos alunos foi útil pois eles depois não só conseguiram responder corretamente à alínea 1.1. da tarefa, mas também às outras alíneas. Considero que os alunos conseguiram assim aprender a comparar raízes quadradas de números naturais. Muitos dos alunos mostraram dificuldades em responder à alínea 1.2. devido ao seu caráter formal, pois pedia aos alunos para estabelecerem uma relação entre a e b quando $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ $(a, b > 0)$. Para apoiar os alunos, recorri ao questionamento e à apresentação de exemplos, e os alunos concluíam que a maior raiz quadrada era a que tinha maior radicando. Na alínea 1.3., verifiquei que alguns alunos revelaram menos dificuldades na sua resolução pois basearam-se na resolução da alínea 1.2. Os alunos que, no entanto, apresentaram dificuldades eu apoiei da mesma forma que os apoiei na alínea 1.2. Em relação à questão 2, em que se pretendia que os alunos fizessem corresponder os pontos da reta real às respetivas abcissas, observei que muitos dos alunos tinham apresentado uma resolução.

Na discussão da questão 1 os alunos na sua generalidade concordaram com as respostas apresentadas e não expuseram dúvidas. Para garantir que os alunos tivessem compreendido a comparação entre raízes quadradas eu escrevi exemplos de raízes e selecionei alunos para as comparar. Os alunos escolhidos foram aqueles que têm mais dificuldades em Matemática, tanto na realização de tarefas como em momentos de avaliação. Em relação à questão 4, eu escolhi um aluno para fazer a correspondência entre um número e um ponto, usando o mesmo critério referido atrás. Em relação à justificação, esses alunos recorriam ao colega sentado ao lado e caso esse também não conseguisse, eu escolhia um aluno que se oferecesse ou, caso contrário, que fosse capaz de apresentar uma justificação.

Penso que a tarefa foi adequada pois no final da aula, houve evidências que os alunos compreenderam como comparar raízes quadradas e, ao identificarem na reta real o número $\sqrt{a}\ (a > 0)$, saberem localizar os números $-\sqrt{a}$, $b\sqrt{a}$, $\sqrt{a} \pm c$ e $-\sqrt{a} \pm d\ (b, c, d \in \mathbb{N})$.

Capítulo 4 – Métodos e Instrumentos de Recolha de Dados

A partir da década de 70 do século XX, a investigação educativa começou a adotar uma abordagem qualitativa para além de uma abordagem quantitativa, focando o seu estudo na compreensão e na procura de significados através de narrativas verbais e de observações numa realidade enraizada nas perceções dos intervenientes (Bento, 2012). Com a adoção de uma abordagem qualitativa, como a adotada neste estudo, surgem novos métodos de recolha de dados.

Neste capítulo apresento as opções metodológicas adotadas na recolha dos dados para este estudo, nomeadamente a observação participante e a recolha documental, e os motivos subjacentes a essas escolhas.

Foi pedida autorização à escola e aos encarregados de educação dos alunos da turma na qual fiz a intervenção letiva para a realização deste estudo. Dos alunos que foram autorizados, todos participam neste estudo.

De referir que os participantes deste estudo foram todos os alunos da turma em que realizei a intervenção letiva.

4.1. Observação participante

No início da lecionação da unidade de ensino eu já conhecia os alunos da turma, os seus métodos de trabalho, alguns dos seus conhecimentos matemáticos e capacidades transversais e algumas das suas dificuldades com alguns tópicos da disciplina. Mas sabia que durante a lecionação da unidade de ensino a observação que efetuaria na sala de aula teria de ser mais cuidadosa e focada, perante o papel que desempenharia.

No decorrer deste estudo assumi um papel de observador participante. A observação participante torna-se bastante vantajosa, pois permite descrever o que acontece, quem e o que está envolvido, quando e onde as coisas acontecem, como ocorrem e porquê (Jorgensen, 1989), e ao mesmo tempo permite fazer essa descrição quando as pessoas que estão a ser estudadas se encontram no seu ambiente natural (Kawulich, 2005). Este método de observação traduz assim uma grande utilidade para o estudo pois permite-me como investigador conhecer o ambiente em que estou inserido e os participantes envolvidos. Além disso, também me permite interagir com os alunos no sentido de compreender o trabalho que eles desenvolvem assim como potenciais dificuldades que demonstrem. A observação participante torna-se assim "o meio mais direto de se estudar uma ampla variedade de fenómenos" (Queiroz, Vall, Souza & Vieira, 2007, p.281). De acordo com Ferreira, Torrecilha e Machado (2012), a observação participante permite rápido acesso a dados sobre situações habituais a que os membros da comunidade estão envolvidos e permite obter qualquer esclarecimento sobre o seu comportamento. No entanto é preciso ter atenção até onde a interação entre observador e observados pode ser conduzida na aplicação da observação participante. Apesar de não poder abdicar da minha posição como professor, especificamente na ajuda aos alunos com eventuais dificuldades na resolução das tarefas, foi necessário garantir que a minha posição como investigador não ficasse comprometida. Assumir uma posição conjunta de professor e de investigador torna-se até vantajosa para a obtenção de bons resultados num processo de observação participante, visto que Kawulich (2005) defende que em troca de dados por parte da comunidade em estudo, o investigador tem a responsabilidade de dar algo em troca.

Considerando o referido, verifica-se que a observação participante contribuiu de forma substancial para a recolha de dados deste estudo. Recordando que se pretende analisar a aprendizagem dos alunos no tópico dos números irracionais, assim como as dificuldades resultantes, torna-se difícil basear-se apenas num processo de observação não participante. Como o professor tem a possibilidade de interagir com os alunos é possível ouvi-los a explicarem como procedem na resolução das tarefas e a exporem as suas dúvidas. Nesta última situação, com o professor a apoiá-los através do processo de questionamento, ele também tem a oportunidade de descobrir a origem das dúvidas dos alunos, assim como eles constroem os seus conhecimentos.

Segundo Jorgensen (1989) é extremamente importante que as observações feitas em qualquer ambiente sejam registadas o mais cedo possível e com o máximo de detalhe possível. Tendo em conta esta exortação é essencial encontrar todos os instrumentos que possam dar esse contributo para a investigação. Segundo Cohen, Manion e Morrison (2000), citados por Coito (2016), a utilização de vários instrumentos de recolha de dados possibilita uma maior confiança nos dados obtidos a partir de diversas fontes, conferindo assim maior fiabilidade ao estudo. Jorgensen (1989) diz que a observação direta é o principal método de recolher informação, mas que o observador participante costuma recorrer a outras estratégias. Dias, Pitolli, Prudêncio e Oliveira (2013) defendem que o diário de bordo pode constituir um bom apoio à memória para o futuro professor e ajudá-lo a compreender as experiências vividas na sala de aula, contribuindo assim para a reflexão e delineamento de novas estratégias de ensino. No entanto, Stein e Smith (1998) defendem que "usar o vídeo para refletir pode, de facto, ser mais vantajoso do que a reflexão baseada na memória ou em notas" (p.12), pois o que é gravado em vídeo possui maior objetividade, permitindo também ver e tornar a ver uma determinada parte de uma aula, "tentando perceber exatamente o que se estava a passar no pensamento dos alunos enquanto eles trabalham numa tarefa específica" (pp.12-13). No seu trabalho Oliveira, Menezes e Canavarro (2012) também apontam as vantagens do uso de equipamentos de gravação no caso de uma professora cuja aula que ela orienta é gravada, em que se pode compreender como a professora preparou a aula, as escolhas que teve de fazer e os motivos por detrás dessas escolhas.

Perante o referido foi feita a recolha de dados contendo as interações entre os alunos e entre o professor e os alunos, recorrendo à gravação de imagens e áudio decorrentes da sala de aula. Como os alunos já tinham participado num estudo efetuado por um outro estudante universitário no ano letivo anterior e tinham conhecimento que as aulas da unidade de ensino seriam gravadas, eles não se mostraram de nenhuma forma constrangidos com a presença desses equipamentos tecnológicos, realizando o seu trabalho na sala de aula de forma regular.

4.2. Recolha documental

A recolha documental foi um outro método de recolha de dados utilizada no âmbito deste estudo. Tendo em conta o objetivo do estudo e, especificamente, as questões que o orientam, compreende-se que é necessária uma análise do trabalho dos alunos na resolução das tarefas propostas e, como tal, foram recolhidas as suas resoluções escritas. Apesar da importância da recolha documental, também é essencial refletir como a efetuar, pois quando se a propôs foi necessário pensar como a fazer sem pôr em causa o funcionamento da sala de aula. Primeiro foi considerada a hipótese de recolher as resoluções ao fim do trabalho autónomo para apurar quais tinham sido as estratégias adotadas pelos alunos, assim como possíveis erros que tinham cometido, mas depois percebeu-se que os alunos necessitariam do seu trabalho para o apresentar e discutir no momento de aula seguinte. Quando era proposta aos alunos uma tarefa que consistisse numa ficha de trabalho elaborada pelo professor da turma, os mesmos estavam acostumados a receber um enunciado por mesa. Depois de resolverem e discutirem a tarefa, o professor recolhia-as e trá-las-ia na aula seguinte fotocopiadas para que cada aluno tivesse um exemplar para si. Considerou-se assim essa hipótese, mas essa decisão impossibilitaria distinguir o trabalho realizado no trabalho autónomo dos alunos daquele que efetuaram durante a discussão. Desta forma seria difícil averiguar as estratégias de resolução adotadas pelos alunos, assim como as suas eventuais dificuldades, dificultando a intenção de responder às questões do estudo. Portanto decidiu-se recorrer a outra estratégia: foram entregues dois enunciados por par de alunos, não isentando os alunos de trabalharem a pares, e no fim do trabalho autónomo, os alunos entregariam uma das versões da tarefa e a outra seria entregue ao professor no final da discussão coletiva. Também foi pedido aos alunos para que resolvessem as tarefas a caneta pois a lápis os alunos poderiam apagar algumas das suas estratégias de resolução utilizadas e no âmbito do estudo é importante analisar qualquer tipo de estratégia adotada pelos alunos, independentemente de estar correta ou não. No início da unidade de ensino os alunos tiveram dificuldades a adotar este novo método de trabalho, mas depois acostumaram-se facilmente.

Para além das resoluções das tarefas dos alunos, também foram fotocopiadas as resoluções dos seus minitestes em que foram avaliados os conhecimentos dos alunos referentes aos números irracionais.

Para a recolha de dados acerca da escola foi usado o regulamento interno da escola e acerca dos alunos foram disponibilizadas informações pelo professor cooperante, que tinha recolhido antes do início do ano letivo.

Capítulo 5 – Análise de Dados

Neste capítulo analiso os dados recolhidos durante a lecionação da unidade de ensino e que permitem responder às questões do meu estudo. Tendo em conta que este estudo se orienta pelas quatro questões que formulei na introdução, este capítulo divide-se em quatro secções com a intenção da análise em cada uma das secções permitir responder a cada questão. Para esse efeito, serão apresentadas e analisadas as resoluções dos alunos das tarefas propostas na sala de aula, dos dois minitestes e de uma questão do teste de avaliação. Também serão apresentados e analisados excertos de interações entre o professor e os alunos para complementar essa análise. Essas interações surgem sob a forma de apoio do professor às dificuldades dos alunos na resolução das tarefas durante o trabalho autónomo ou na discussão coletiva das tarefas.

Como referido na secção "Descrição das Aulas", a distribuição dos alunos na sala de aula foi alterada na 3ª aula da unidade de ensino em que foi proposta a tarefa *Os números reais*. Observa-se, assim, que nesta tarefa e nas que sucederam, os pares de alunos (aqui referidos por nomes fictícios) não são os mesmos que são referidos nas duas primeiras tarefas das da unidade de ensino: *Números e dízimas* e *Novos números e um novo conjunto*.

5.1. Identificação de números irracionais em várias representações

Nesta secção pretendo analisar como os alunos identificam números irracionais em várias representações. A análise basear-se-á na tarefa 1 (questões 1, 2 e 3), na tarefa 2 (questões 1, 2 e 3), na tarefa 3, na tarefa 4 e no 1º miniteste (questão 1).

A tarefa 1, *Números e dízimas,* teve como objetivo rever as dízimas que representam números racionais de modo a que os alunos depois reconhecessem a existência de um novo tipo de dízima: a dízima infinita não periódica. Começava por explorar duas representações de um número racional: a decimal e a fracionária, que estaria subjacente à realização da questão 1.

Com a questão 1 pretendia-se que os alunos fossem capazes de identificar e explicar quando é que uma fração representa uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica e de reconhecer a ineficácia da calculadora, nalguns casos, para identificar a natureza dessa dízima. Na análise de dados da questão 1.1. verifiquei que 11 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa apresentaram um valor aproximado para $\frac{13}{19}$ recorrendo à calculadora, enquanto 2 limitaram-se a responder à questão sem a justificar, e 1 respondeu e justificou, corretamente, com base na representação fracionária, mas porque o professor o apoiou durante um período considerável até que ele obtivesse essa resposta. A maioria das respostas, no entanto, sugere que os alunos estão acostumados a identificar o tipo de dízima que um número fracionário representa pela sua representação decimal. Também verifiquei que 7 dos 11 pares de alunos referidos assumem, de forma correta, que a fração $\frac{13}{19}$ não representa uma dízima finita. Um exemplo é a resolução de Diogo e de Carla na figura 11, em que os alunos apresentam um valor aproximado para $\frac{13}{19}$, na sua representação decimal e assumem assim que a dízima não é finita. Estes dados indiciam que a maioria dos alunos identifica o tipo de dízima que uma fração representa começando por obter um valor aproximado da fração, com recurso à calculadora. Se a representação decimal do número ocupar todo o ecrã da calculadora, os alunos assumem que é infinita.

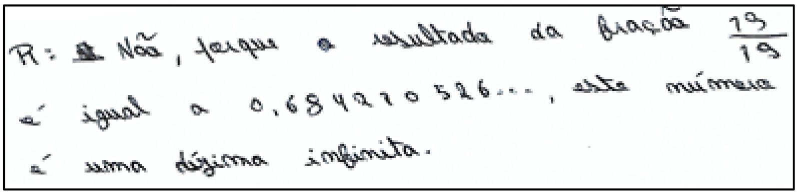

R: Não, porque o resultado da fração $\frac{13}{19}$ é igual a 0,684210526..., este número é uma dízima infinita.

Figura 11 - Resolução de Diogo e Carla (Tarefa 1, Questão 1.1.)

No entanto, alguns dos alunos que identificaram a dízima que a fração $\frac{13}{19}$ representa como não finita, cometeram erros na justificação da sua resposta. Na figura 12, a resolução de Tomás e de Vera evidencia que os alunos identificam de forma incorreta o período da dízima, assumindo que a parte decimal que a calculadora apresenta é o período da dízima.

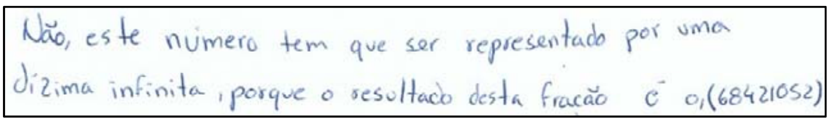

Não, este número tem que ser representado por uma dízima infinita, porque o resultado desta fração é 0,(68421052)

Figura 12 - Resolução de Tomás e Vera (Tarefa 1, Questão 1.1.)

Dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa 1, 5 assumiram de forma incorreta que a fração $\frac{13}{19}$ é representada por uma dízima finita. Tal como a maioria destes 5 pares de alunos, Carlos e Marta recorrem à calculadora para obter um valor aproximado da fração $\frac{13}{19}$ e depois justificaram a sua resposta com base nesse valor.

Tal como a resposta de Carlos e Marta (figura 13), a maioria dos alunos conclui de forma incorreta que a dízima é finita, mas não porque a calculadora mostra um número limitado de dígitos da dízima representativa de $\frac{13}{19}$, e sim porque não lhes é possível identificar o período. No entanto, tal como os alunos que apresentaram uma resolução semelhante à das figuras 11 e 12, estes mostram reconhecer uma dízima finita, evidenciando ter esta noção apropriada.

Sim é dizima finita, porque os numeros não se repetem e porque tem um fim.

Figura 13 - Resolução de Carlos e Marta (Tarefa 1, Questão 1.1.)

Existe, a meu ver, uma dependência por parte dos alunos na representação decimal que a calculadora fornece de um número fracionário, e esta pode influenciar de forma diferente os alunos na resposta à questão. Os alunos que apresentaram uma resolução semelhante à de Diogo e Carla (figura 11) respondem corretamente que a dízima não é finita, mas porque assumem de que existem mais números para além dos que a calculadora apresenta, estando assim a par da sua limitação. Os alunos que apresentaram uma resolução semelhante à de Carlos e Marta (figura 13) também recorrem à representação decimal fornecida pela calculadora, mas invocam a noção de dízima infinita não periódica para justificarem a sua resposta. Apesar de ter evidências de outras situações que os alunos dispõem da noção correta de dízima infinita não periódica, eles acabam por justificar de forma incorreta por não poderem visualizar o período da dízima na calculadora.

Na questão 1.2., 6 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa 1 assumiram que o número $\frac{13}{19}$ é representado por uma dízima infinita periódica. A maioria destes alunos recorrem ao seu valor aproximado, obtido com recurso à calculadora, para justificar a sua resposta, como mostrado na resolução de Guilherme e de Constança na figura 14. Apesar de os dois alunos apresentarem uma resposta correta, identificam incorretamente o período da dízima ao considerarem que o segundo 6 é repetição do primeiro. A sua resolução ainda sugere que os alunos desconhecem que o período pode possuir um número de algarismos suficientemente grande que impede de ser visível na calculadora, mostrando dificuldades na interpretação da representação decimal obtida da calculadora, como Tomás e Vera (figura 12) e Carlos e Marta (figura 13).

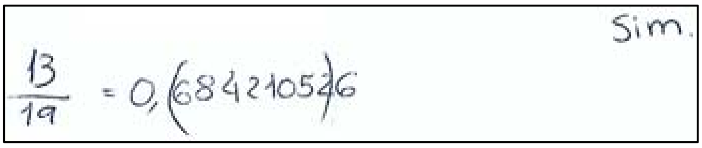


Figura 14 - Resolução de Guilherme e Constança (Tarefa 1, Questão 1.2.)

Um dos erros que observei na análise das resoluções foi haver alunos que apesar de assumirem na questão 1.1. que o número $\frac{13}{19}$ não é representado por uma dízima finita, na questão 1.2. assumem que também não pode ser representado por uma dízima infinita periódica, tendo este erro diferentes motivos por aparecer. As respostas dos pares André e Susana (figura 15) e Diogo e Carla (figura 16) sugerem que os alunos desconhecem que se um número fracionário é representado por uma dízima, então é finita ou infinita periódica, visto que na questão 1.1 tinham respondido de forma correta que a dízima que representa $\frac{13}{19}$ não era finita, mas depois afirmam na questão 1.2. que também não pode ser representado por uma dízima infinita periódica. André e Susana tinham apresentado 0,68 como um valor aproximado de $\frac{13}{19}$ e para justificarem a sua resposta, invocam o facto de a dízima que representa $\frac{13}{19}$ não dispor de período, o que sugere que os alunos desconhecem que o período pode possuir um número de algarismos suficientemente grande que impede de ser visível na calculadora, revelando mais uma vez a dependência e dificuldades no uso da calculadora por parte dos alunos na análise do tipo de dízima que uma fração representa.

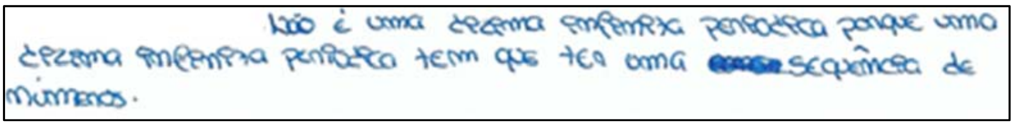


Figura 15 - Resolução de André e Susana (Tarefa 1, Questão 1.2.)

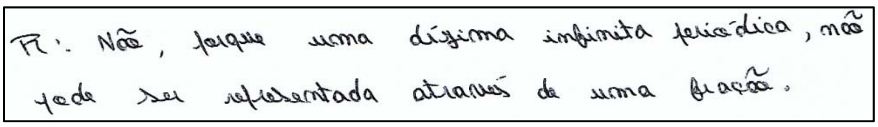


Figura 16 - Resolução de Diogo e Carla (Tarefa 1, Questão 1.2.)

No entanto, as figuras 14, 15 e 16 sugerem que os alunos que apresentaram resoluções semelhantes têm a noção de dízima infinita periódica apropriada e são capazes de reconhecê-la. No final da discussão da questão 1, cujo excerto apresento abaixo, alguns alunos reconheceram que uma fração que representa uma dízima finita tem um denominador que se pode escrever como o produto de potências de bases 2 e 5 e, deste modo, não precisam recorrer à calculadora. Para apoiar esta discussão, como exemplos, escrevi os números 2,5, 0,25 e 0,005 no quadro, que os alunos reconheceram de imediato como dízimas finitas e depois foram capazes de escrevê-los na forma de fração: 2,5 é representado pelas frações $\frac{25}{10}$ e $\frac{5}{2}$, 0,25 é representado pela fração $\frac{25}{100}$ e 0,005 pela fração $\frac{5}{1000}$.

Professor: então, vamos lá, digam-me lá uma coisa, se são dízimas finitas, o que é que vocês me podem dizer sobre as frações?

Tomás: são potências de 10.

Professor: o que é que são potências de 10?

Madalena: os denominadores.

Professor: então, o que é que eu sei sobre estes denominadores? [O professor aponta para o 5 sobre 2]. Agora, uma coisa, este número aqui, como disse a Constança, também representa este [25 sobre 10], que, como podem ver, pode representar uma dízima finita, mas o denominador não é 10, deixa de ser uma dízima finita?

Alguns alunos: não.

Professor: então porquê? Então como é que eu posso dizer que isto pode ser representado por uma dízima finita? [Eu multiplico o numerador e o denominador por 5]. Vocês não têm um nome para isto? Uma fração passa para esta…

Alguns alunos: equivalente.

Professor: quando é que uma fração é uma dízima finita? Quando o denominador é…

Tomás: uma potência de 10.

Professor: … uma potência de 10 ou quando uma fração é…

Alguns alunos: equivalente.

Professor: vamos lá esclarecer uma coisa. Isto $\left(\frac{13}{19}\right)$ é um número racional?

Alguns alunos: sim.

Professor: então, como é que vai ser a dízima?

Madalena: finita ou infinita periódica.

Professor: vai ser finita ou infinita periódica. O que é que disseram na 1.1.?

Madalena: não podia ser finita.

Professor: a Madalena disse que o número é racional, portanto é finita ou infinita periódica. Como não é finita, é infinita periódica.

Com a questão 2 pretendia-se que os alunos reconhecessem que existem dízimas que não são finitas, nem infinitas periódicas. Nas resoluções dos alunos, especificamente na questão 2.2., 9 dos 14 pares de alunos identificaram corretamente o número 0,121221222122221… como uma dízima infinita que não era periódica, enquanto os restantes responderam de forma incorreta ou não apresentaram uma resposta. Apresenta-se, como exemplo das respostas dos 9 pares de alunos, a resolução de Alexandre e Daniela (figura 17), que evidencia que os dois alunos reconhecem a inexistência de período na dízima. O facto de o número estar apresentado na forma de dízima e com um grande número de casas decimais, quando comparado com a dízima que representa $\frac{13}{19}$ que alguns alunos (figuras 11, 12 e 14) obtiveram com recurso à calculadora, parece ter favorecido a resposta correta dos 9 pares de alunos referidos. Na questão 1.2., apenas 6 dos 14 pares de alunos responderam de forma correta que $\frac{13}{19}$ era uma dízima infinita periódica, enquanto na questão 2.2., esse número passou para 9 e acredito que este número podia ser superior, porque houve 3 pares de alunos que não responderam às questões seguintes, portanto podem não ter resolvido a questão 2.2. por falta de tempo. Para responder à questão 1.2., os alunos optaram por recorrer à representação decimal de $\frac{13}{19}$ e um dos motivos por ter havido respostas incorretas foi a impossibilidade de identificar o período da dízima, enquanto a dízima na questão 2 é apresentada com um número de dígitos suficientemente grande para os alunos identificarem uma sequência de dígitos que se repete, correspondente ao seu período, facilitando a conclusão que é uma dízima infinita periódica.

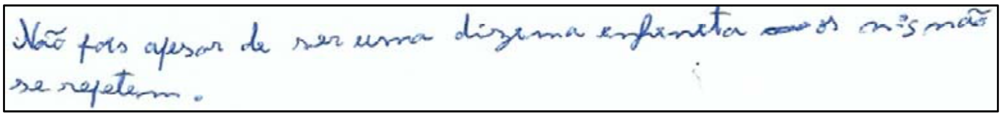


Figura 17 - Resolução de Alexandre e Daniela (Tarefa 1, Questão 2.2.)

Na questão 3 eram pedidos dois exemplos de dois números representados na forma de dízima que não fossem racionais, esperando, portanto, que os alunos apresentassem duas dízimas infinitas não periódicas. Dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa, apenas 8 apresentaram uma resposta: 2 apresentaram uma resposta correta e 6 uma resposta incorreta. Henrique e Teresa são um dos pares que apresentou uma resposta correta. A sua resolução (figura 18) sugere que os alunos reconhecem que um número que não é racional, representado na forma de dízima, não pode ser finita, nem infinita periódica. Dos alunos que apresentaram uma resposta incorreta, a maior parte apresentou números fracionários ou dízimas infinitas periódicas, o que sugere que os alunos ainda não se tinham apropriado das diferentes representações de número irracional, além de também não terem conseguido recorrer à nota recordatória apresentada no início da tarefa.

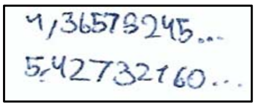


Figura 18 - Resolução de Henrique e Teresa (Tarefa 1, Questão 3)

A aceitação de que uma dízima que representa um número que não é racional revelou-se difícil para os alunos, como se apresenta no excerto da discussão da questão 3 abaixo:

> **Teresa:** 4,36578245…
>
> **Professor:** toda a gente concorda que este número não é racional?
>
> **Adriana:** mas oh stôr, ela pode-se repetir, o que a gente não sabe.
>
> **André:** então pode-se repetir ou não.
>
> **Teresa:** então se os números se repetiriam, podíamos pôr os parênteses, como não pomos, não se repetem.
>
> **Professor:** então, ninguém me consegue dar um número daquele tipo?
>
> [Um aluno responde 4,363663666366663…]
>
> **Professor:** agora, uma coisa, vou escrever aqui outra dízima, digam-me lá se concordam com esta [eu escrevo 0,1234567…]?
>
> **André:** é uma dízima infinita não periódica.
>
> **Professor:** portanto de tudo isto eu só quero que decorem uma coisa, os números racionais podem ser escritos de três formas [número inteiro, dízima finita e dízima infinita periódica] e se não forem uma destas, não é um número racional.

A tarefa 2 tinha como objetivo principal a exploração da representação de números irracionais na forma de raiz quadrada de um número natural. A questão 1 tinha como objetivos de aprendizagem saber identificar números racionais e números irracionais na forma de raiz quadrada de um número natural, de reconhecer a existência de um novo conjunto numérico $\mathbb{R}$ e as relações existentes entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Ao observar as resoluções dos alunos da questão 1.1., verifiquei que 12 dos 14 pares de alunos identificaram corretamente os números $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$ como números racionais. Um dos dois pares que apresentaram uma resposta incorreta, identificou de forma correta os números $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$ como números racionais, mas também incluiu $\sqrt{10}$ na sua resposta. Este par escreveu os três primeiros na forma de número inteiro e o quarto na de dízima finita e depois na de fração, o que sugere que os dois alunos não fizeram uso devido da nota introdutória apresentada no início da tarefa. O segundo par de alunos identificou os números $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ e $\sqrt{8}$ como racionais, e não havendo justificação é difícil compreender a sua resposta. Em ambas as respostas verifiquei que houve recurso à representação fracionária de um número, sugerindo que os alunos recordavam que um número racional é um número que se pode representar na forma de fração.

Em relação aos alunos que responderam corretamente à questão 1.1., 3 não apresentaram uma justificação, mas dos que apresentaram, as alunas Madalena e Adriana (figura 19) foram um de dois pares que recorreu à nota introdutória apresentada no início da tarefa, ao referirem que a raiz quadrada de um número inteiro que não é um quadrado perfeito é uma dízima infinita não periódica, para justificarem a sua resposta.

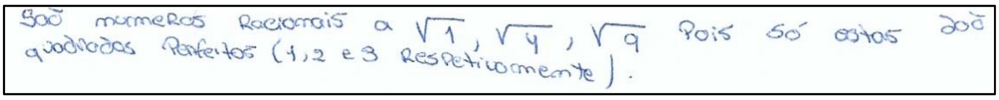

São numeros Racionais a $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ Pois só estes são quadrados Perfeitos (1,2 e 3 Respetivamente).

Figura 19 - Resolução de Madalena e Adriana (Tarefa 2, Questão 1.1.)

Houve 7 pares de alunos que invocaram a definição de número racional ou as várias representações de números racionais, ou seja, tópicos que tinham sido discutidos na aula anterior a propósito da tarefa *Números e dízimas*, sugerindo que os alunos procuraram apresentar uma justificação genérica em vez de uma que se dirigisse especificamente aos números apresentados. A resolução de Ricardo (figura 20) representa isso, ao justificar a racionalidade dos números $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$ por serem números inteiros, enquanto Tomás e Vera, cuja resolução se apresenta na figura 21, afirmam que estes números são racionais porque se podem escrever na forma de fração. Estas justificações sugerem que os alunos assumem que se a raiz quadrada de um número natural é um número inteiro, então é racional, e em caso contrário, não é, baseando-se apenas na representação da raiz quadrada do número, em vez da propriedade enunciada na nota introdutória apresentada no início da tarefa.

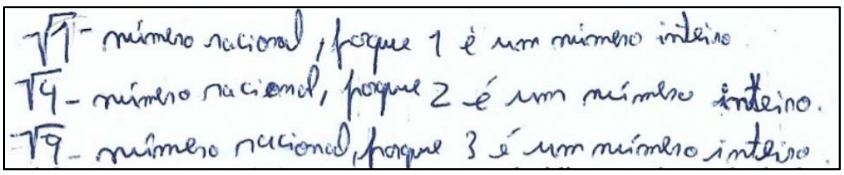

$\sqrt{1}$ - número racional, porque 1 é um número inteiro.
$\sqrt{4}$ - número racional, porque 2 é um número inteiro.
$\sqrt{9}$ - número racional, porque 3 é um número inteiro.

Figura 20 - Resolução de Ricardo (Tarefa 2, Questão 1.1.)

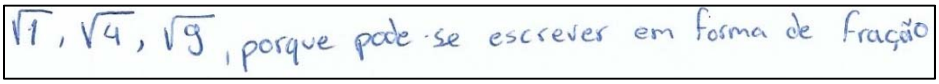

$\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, porque pode-se escrever em forma de fração

Figura 21 - Resolução de Tomás e Vera (Tarefa 2, Questão 1.1.)

Na questão 1.2., pretendia-se que os alunos estabelecessem uma condição que permitisse decidir quando é que a raiz quadrada de um número natural é um número racional. Dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa apenas 4 responderam e, desses, apenas 1 par apresentou uma resposta completa e correta. Esse par corresponde a Madalena e Adriana, cuja resolução se apresenta na figura 22. As alunas recorreram à nota introdutória apresentada no início da tarefa para responder à questão 1.1. (figura 19), reconhecendo que a raiz quadrada de um número natural é um número racional quando o radicando é um quadrado perfeito, deduzindo depois a condição apresentada na figura 22. Um dos pares que respondeu incorretamente deduziu uma condição que apenas se verificava para o número $\sqrt{1}$, enquanto os restantes pares apresentaram a definição de número racional e invocaram as suas representações na forma de dízima e de número inteiro, não se referindo assim especificamente à raiz quadrada de um número natural.

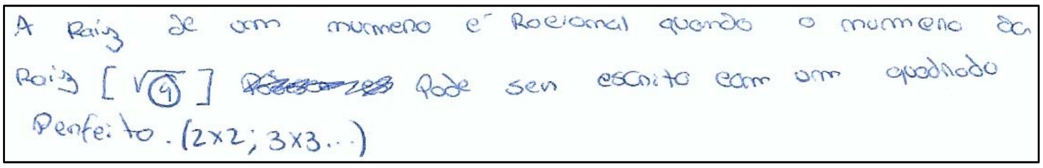

A Raiz de um numero é Racional quando o numero da Raiz [$\sqrt{9}$] Pode ser escrito com um quadrado Perfeito. (2x2; 3x3...)

Figura 22 - Resolução de Madalena e Adriana (Tarefa 2, Questão 1.2.)

Penso que houve menos respostas corretas e completas para a questão 1.2. por exigir a dedução de uma condição, o que se revela ser mais difícil para os alunos do que apenas a identificação dos números racionais e justificação da sua escolha, tal como ocorria na questão 1.1.. As respostas dos alunos demonstram que eles necessitam de obter uma representação diferente para a raiz quadrada de um número natural antes de o classificarem como racional ou irracional. E ao fazerem isso, eles identificam o número racional quando obtêm um número natural, e apesar de haver um número reduzido de respostas para a questão 1.2., mas um elevado número para a questão 1.1., parece-me que os alunos reconhecem que se a raiz quadrada de um número natural é igual a um número natural, então é racional, e em caso contrário, não é racional.

Na questão 2 foi pedido aos alunos que analisassem o valor lógico de quatro afirmações acerca das relações entre números reais e completassem um esquema que estabelecesse essas relações e classificasse os números a partir da sua representação em dízima.

No quadro 3, apresenta-se uma síntese das respostas dadas pelos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa.

Quadro 3 - Aferição das Respostas dos Alunos à Questão 2.1. da Tarefa 2

Afirmação	Respondeu		Não Respondeu
	Certo	Errado	
a)	11	2	1
b)	12	2	0
c)	12	1	1
d)	7	5	2

Pelo quadro 3 verifica-se que quase todos os alunos reconhecem que todo o número natural é um número racional (alínea a), que nem todo o número racional é inteiro (alínea b) e que nem toda a dízima representa um número racional (alínea c). Para a justificação das afirmações falsas, alguns alunos recorreram à apresentação de um contraexemplo, como Carlos e Marta que na sua resolução (figura 23) apresentam um exemplo de um número racional e não inteiro. Alexandre e Daniela (figura 24) também apresentaram uma justificação correta, baseando-se na discussão da tarefa 1, referindo que as dízimas infinitas não periódicas não representam números racionais.

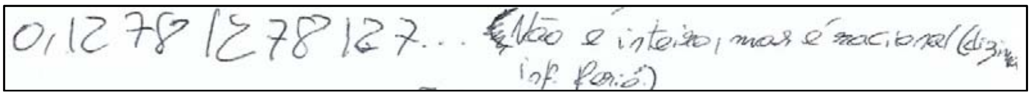


Figura 23 - Resolução de Carlos e Marta (Tarefa 2, Questão 2.1.b))

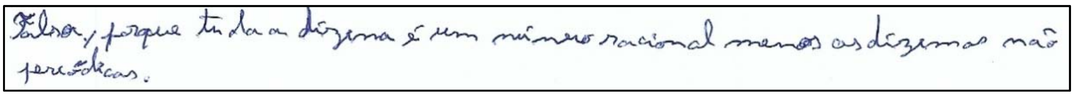


Figura 24 - Resolução de Alexandre e Daniela (Tarefa 2, Questão 2.1.c))

Alguns alunos, apesar de terem sido capazes de classificar corretamente as três primeiras alíneas quanto ao seu valor lógico, manifestaram dificuldades em apresentar uma justificação completa e correta.

Como se observou no quadro 3, foi na alínea d) que se verificou um menor número de respostas corretas, o que se pode ser devido ao facto de os alunos terem abordado a noção de número real, pela primeira vez, nesta aula. A resolução de Ricardo, apresentada na figura 25, evidencia as suas dificuldades em justificar por que nem todo o número real é racional, ao referir que as dízimas infinitas são números reais (não explicitamente), mas que não são racionais. O aluno mostra que ainda não reconhece a diferença entre uma dízima infinita que representa um número racional e a que representa um número irracional.

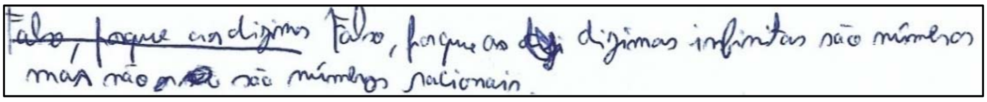


Figura 25 - Resolução de Ricardo (Tarefa 2, Questão 2.1.d))

Em relação à questão 2.2., 8 dos 14 pares de alunos preencheram todos os retângulos do esquema, mas apenas 3 pares os completaram corretamente, como é o caso de Madalena e Adriana (figura 26).

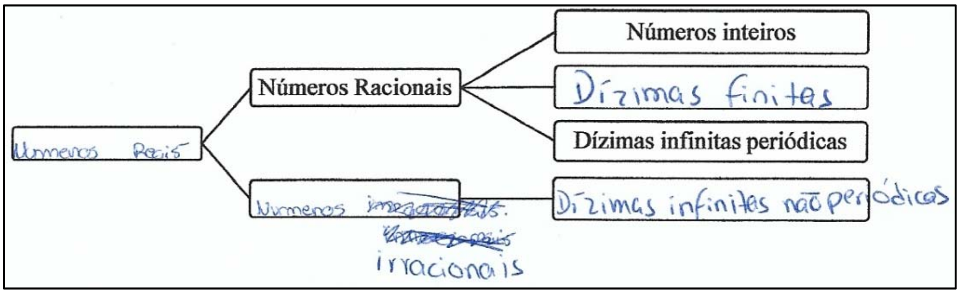


Figura 26 - Resolução de Madalena e Adriana (Tarefa 2, Questão 2.2.)

Os restantes 5 pares de alunos apresentaram uma resolução semelhante à de Guilherme e Constança, que se apresenta na figura 27. Estes alunos assumem incorretamente que os números irracionais são representados por “dízimas infinitas” e que a união do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais é o conjunto de “números”. A primeira incorreção sucede por falta de rigor na linguagem ou desconhecimento da classificação das dízimas, pois os alunos, apesar de reconhecerem que existe uma dízima que não é finita, nem infinita periódica, creem que é suficiente denominá-la de infinita. A segunda incorreção referida pode ter sucedido porque os alunos trabalharam com a noção de número real pela primeira vez nesta aula e ainda não se tinham apropriado do conjunto dos números reais como a união do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais.

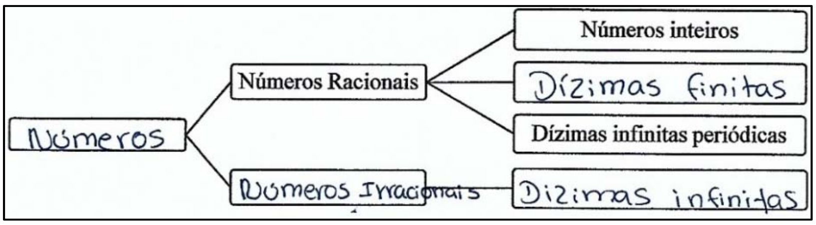


Figura 27 - Resolução de Guilherme e Constança (Tarefa 2, Questão 2.2.)

Na questão 3.1. pretendia-se que os alunos reconhecessem que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, através de um diagrama, e pela análise das resoluções verifiquei que dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa, 6 resolveram-na corretamente, como Carlos e Marta fizeram (figura 28), 2 responderam incorretamente e 6 não apresentaram uma resposta. Como estes últimos não apresentaram uma resposta à questão 2.2., podem não ter resolvido a questão 3.1. também por falta de tempo. Os alunos que apresentaram uma resposta incorreta, como a da figura 29, afirmaram incorretamente que $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$. Durante o trabalho autónomo observei que alguns alunos referiam $\mathbb{R}$ como o conjunto de números racionais, podendo estes 2 pares terem feito parte desse grupo, e ao fazerem isso, penso que confundiram, consequentemente $\mathbb{Q}$ como o conjunto de números reais. Ao analisar as suas resoluções na questão 2.2., verifiquei que nenhum deles conseguiu identificar corretamente o conjunto de números reais como o conjunto de números racionais e o conjunto de números irracionais, portanto a meu ver, eles ainda não sabiam o que representava o $\mathbb{R}$, o que também é compreensível, visto que ainda se tratava da primeira aula que trabalharam com este conjunto.

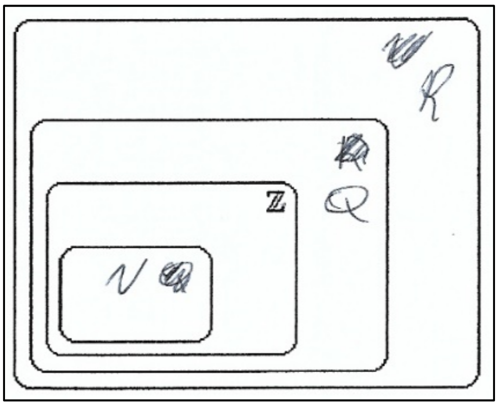


Figura 28 - Resolução de Carlos e Marta (Tarefa 2, Questão 3.1.)

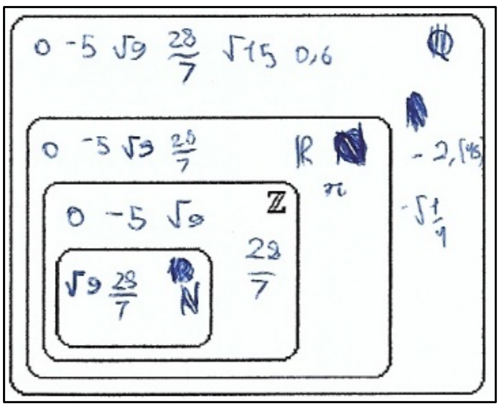


Figura 29 - Resolução de Henrique e Teresa (Tarefa 2, Questão 3.1.)

Na questão 3.2. pretendia-se que os alunos identificassem a que conjunto numérico ou conjuntos numéricos, alguns números pertenciam. Dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa, apenas metade apresentou uma resposta, inserindo alguns ou todos os números apresentados no diagrama. A maioria dos alunos que responderam reconheceu que os números naturais pertencem a $\mathbb{N}$ e que os números inteiros não positivos pertencem a $\mathbb{Z}$, mas cometerem diversos erros que evidenciam dificuldades com outros conjuntos numéricos. Por exemplo, a resolução de Guilherme e Constança (figura 30) sugere que os alunos reconhecem que $\sqrt{9}$ e $\frac{28}{7}$ são números racionais, considerando as resoluções de ambos em questões desta e da tarefa 1, mas depois não conseguem reconhecer que também são números naturais.

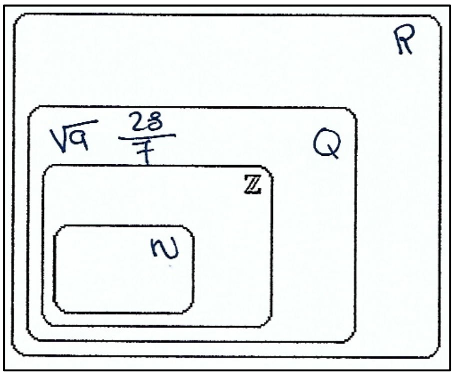


Figura 30 - Resolução de Guilherme e Constança (Tarefa 2, Questão 3.2.)

As dificuldades dos alunos Alexandre e Daniela não se parecem focar apenas em identificar a que conjunto numérico pertence o número apresentado, mas também na interpretação das suas diversas representações e em saber o que representa o conjunto $\mathbb{R}$. A sua resolução (figura 31) sugere que não reconhecem que $-2,(45)$ e $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ representam dízimas, visto que eles indicam corretamente que -5 e 0 pertencem a $\mathbb{Z}$, sugerindo que sabem que se trata do conjunto de números inteiros. No entanto, eles indicam corretamente que 0,6 pertence ao conjunto $\mathbb{Q}$ e como indicaram corretamente na questão 2.2. que as dízimas finitas são números racionais, também acredito que sabem que $\mathbb{Q}$ é o conjunto de números racionais. A dificuldade de ambos aqui parece ser que os alunos desconhecem que π e $\sqrt{15}$ não são números racionais. O facto de os alunos também não terem preenchido nenhum número na zona correspondente ao conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ também sugere que os alunos ainda não adquiriram o significado de $\mathbb{R}$, corroborado pelo facto de que na questão 2.2. também não mostrarem saber que se trata da união do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais.

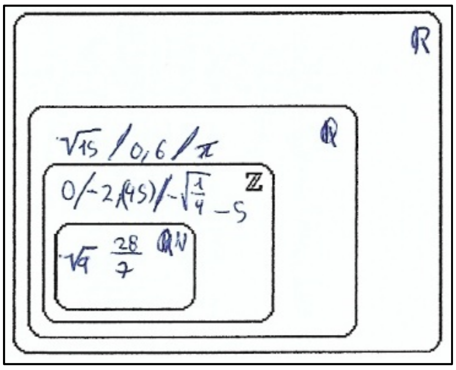


Figura 31 - Resolução de Alexandre e Daniela (Tarefa 2, Questão 3.2.)

Para além dos alunos Henrique e Teresa (figura 32) não terem sido capazes de identificar o número $\sqrt{15}$ como irracional, também interpretam incorretamente o diagrama: como $\sqrt{9}$ pertence a todos os conjuntos numéricos indicados, os dois alunos veem como necessário escrevê-lo como pertencente a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, sendo apenas necessário fazê-lo para $\mathbb{N}$.

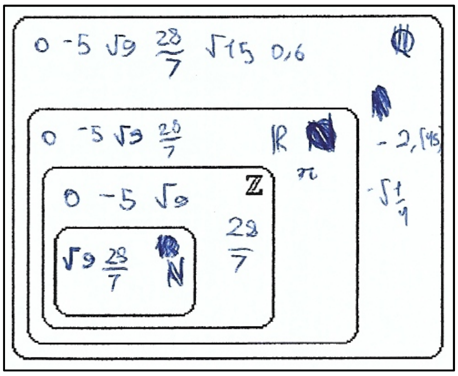


Figura 32 - Resolução de Henrique e Teresa (Tarefa 2, Questão 3.2.)

Uma das dificuldades que parece haver em comum nas três resoluções é a falta de tratamento dos números por parte dos alunos. Por exemplo, os alunos Alexandre e Daniela (figura 31) poderiam escrever $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ na forma de dízima e ao identificarem que representava uma dízima finita, identificá-lo-iam como pertencente a $\mathbb{Q}$, como fizeram com 0,6.

Para garantir uma melhor compreensão das relações existentes entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ e dos números que os constituem, foi proposta a tarefa 3. Para esta tarefa, os alunos têm de reconhecer os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, as relações entre eles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e também reconhecer quando os números propostos na tarefa lhes pertencem. Numa análise das resoluções dos alunos verifiquei que alguns alunos já não cometeram os erros que tinham cometido em tarefas anteriores, o que revela um progresso na aprendizagem dos números irracionais. Um exemplo desta evolução é evidente na resolução de Constança (figura 33), que procurou representações alternativas, ao contrário do que tinha feito na tarefa 2, aos números $\frac{\sqrt{36}}{3}$, $\sqrt{5}$ e $-\frac{800}{100}$, o que lhe permitiu identificar corretamente a natureza de cada um. Com a conversão das representações dos números $\frac{\sqrt{36}}{3}$, $\sqrt{5}$ e $-\frac{800}{100}$ para decimal, na tarefa 3, conseguiu apresentar uma resposta correta.

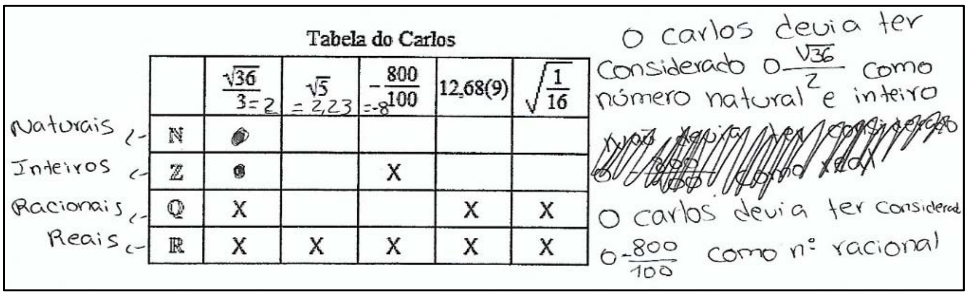


Tabela do Carlos

	$\frac{\sqrt{36}}{3}=2$	$\sqrt{5}$ = 2,23	$-\frac{800}{100}$ = -8	12,68(9)	$\sqrt{\frac{1}{16}}$
Naturais ← $\mathbb{N}$	●				
Inteiros ← $\mathbb{Z}$	●		X		
Racionais ← $\mathbb{Q}$	X			X	X
Reais ← $\mathbb{R}$	X	X	X	X	X

Figura 33 - Resolução de Constança (Tarefa 3)

Semelhantemente, o aluno Diogo, na tarefa 1, afirmou que uma dízima infinita periódica não pode ser representada por uma fração (figura 16), não podendo ser assim um número racional, mas na tarefa 3, o aluno, juntamente com Marta, já afirma o contrário com o número 12,68(9), dizendo que pertence a $\mathbb{Q}$ (figura 34).

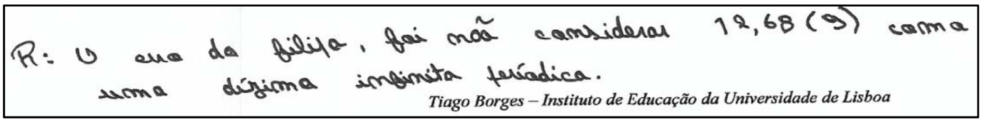


Figura 34 - Resolução de Diogo e Marta (Tarefa 3)

No entanto, houve alunos cujas resoluções da tarefa 3 ainda evidenciaram erros que não se tinham observado nas suas resoluções em tarefas anteriores, evidenciando dificuldades relacionadas com as representações dos números irracionais, as noções de alguns conjuntos numéricos e as relações existentes entre eles. Nas tarefas 1 e 2, Henrique (figura 18) e Daniela (figura 24) tinham afirmado que as dízimas infinitas não periódicas não representam números racionais, mas na tarefa 3 (figura 35) apresentam uma resposta contraditória. A meu ver, isto pode-se dever ao facto de os alunos ainda estarem a lidar com um número representado na forma de raiz quadrada, e não em dízima, e apesar de os alunos terem recorrido à representação decimal de $\sqrt{5}$ podem ainda não terem compreendido que a raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito não é um número racional. Ao mesmo tempo, a resolução dos alunos sugere também que eles ainda não tinham reconhecido que $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, evidenciando dificuldades na interpretação deste conjunto numérico.

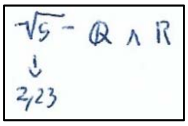


Figura 35 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 3)

A discussão coletiva sobre o tipo de número que $\sqrt{5}$ é e a que conjuntos numéricos pertence aborda as dúvidas levantadas pela resolução de Henrique e Daniela, mas depois a aluna Carolina evidencia dificuldades em saber o que representa o conjunto $\mathbb{Q}$, que leva à intervenção de alguns alunos, e cujas respostas levam-me a acreditar que a noção de $\mathbb{R}$ e da relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ainda podem não estar totalmente apreendidas por todos os alunos:

Teresa: $\sqrt{5}$ não é racional.

Professor: então, atenção, a Teresa diz que este X aqui [Tabela da Filipa na tarefa 3] não está certo. Teresa, queres explicar porquê?

Teresa: porque 5 não é um quadrado perfeito, portanto vai ser uma dízima infinita não periódica.

Professor: portanto, recordam isso que demos na última aula. Portanto, o 5 não é um quadrado perfeito, portanto como disse a Teresa, é uma dízima infinita não periódica, certo? Toda a gente concorda? Atenção, vamos ouvir a Carolina.

Carolina se não é racional, vai ser irracional?

Professor: toda a gente concorda com a Carolina? Se $\sqrt{5}$ não é racional, então é irracional?

Alguns alunos: sim.

Carolina: então está certo, porque $\mathbb{Q}$ é racional e irracional…

Alguns alunos: não, não.

Tomás: não, é só os racionais.

Carolina: mas o $\mathbb{R}$ não é…

Tomás: o $\mathbb{R}$ são os reais.

Constança: são os racionais e irracionais.

O aluno Ricardo ainda não demonstra ter compreendido que um número racional pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica, pois nesta discussão, juntamente com a aluna Carla, ainda afirma o contrário.

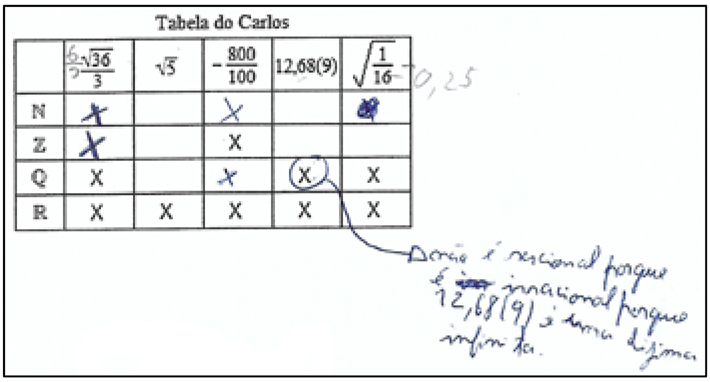


Tabela do Carlos

	$\frac{\sqrt{36}}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\frac{800}{100}$	12,68(9)	$\sqrt{\frac{1}{16}}$
$\mathbb{N}$	X		X		
$\mathbb{Z}$	X		X		
$\mathbb{Q}$	X		X	X	X
$\mathbb{R}$	X	X	X	X	X

Figura 36 - Resolução de Ricardo e Carla (Tarefa 3)

Semelhantemente, a aluna Teresa, nesta tarefa (figura 37), respondeu que 12,68(9) é um número racional, mas não real, mostrando que ainda não compreendeu que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

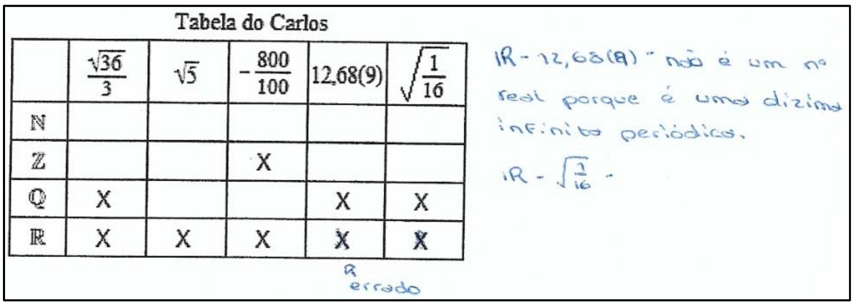


Tabela do Carlos

	$\frac{\sqrt{36}}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\frac{800}{100}$	12,68(9)	$\sqrt{\frac{1}{16}}$
$\mathbb{N}$					
$\mathbb{Z}$			X		
$\mathbb{Q}$	X			X	X
$\mathbb{R}$	X	X	X	X	X

Figura 37 - Resolução de Teresa (Tarefa 3)

No excerto seguinte da discussão dos conjuntos numéricos a que 12,68(9) pertence, o aluno Ricardo já afirma que 12,68(9) é racional, e a aluna Teresa, assim como outros alunos, reconhecem que 12,68(9) é uma dízima infinita periódica, e, portanto, que pertence a $\mathbb{Q}$ e, consequentemente a $\mathbb{R}$, constituindo aprendizagens.

Ricardo: é um racional, e os números racionais e irracionais fazem parte dos números reais.

Professor: Teresa, não estás convencida? Mas percebeste, ouviste a explicação dele?

Teresa: eu ouvi a explicação dele, stôr, … aquilo é uma dízima e os números racionais são dízimas finitas e infinitas periódicas. É o $\mathbb{R}$, e as únicas dízimas que estão no $\mathbb{R}$ são as dízimas infinitas não periódicas, aquilo é uma dízima periódica.

Professor: quem é que quer responder à Teresa? Madalena?

Madalena: tu, o conjunto ℚ são as dízimas infinitas periódicas e as dízimas finitas e depois quando vais para o conjunto ℝ são essas dízimas e juntas as infinitas não periódicas, portanto o conjunto ℝ tem todos os números.

Teresa + Alguns alunos: ah…!

Professor: toda a gente concorda que isto [12,68(9)] é uma dízima infinita periódica?

Alguns alunos: sim.

Professor: então, se é uma dízima infinita periódica, pertence a ℚ?

Alguns alunos: sim.

Professor: então e vai pertencer a ℝ?

Alguns alunos: agora, sim.

No entanto, no final da discussão da tarefa 3 pareceu-me que outros alunos ainda não estavam esclarecidos quanto às noções dos conjuntos numéricos e da relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, visto que tinham participado sobretudo alunos que têm um bom desempenho e não todos os alunos. Para esclarecer as ainda possíveis dúvidas desses alunos acerca do conjunto numérico, ou conjuntos numéricos, a que um número pertence, nomeadamente da relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e de que qualquer número irracional pertence a $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, foi proposta a tarefa 4 *Números reais e conjuntos*. Contrariamente ao que sucedera na resolução da tarefa 3, Ricardo e Carla (figura 38) respondem corretamente que as dízimas infinitas periódicas constituem números racionais, constituindo assim aprendizagem. Além de Ricardo e Carla, mais 10 pares de alunos também apresentaram a mesma resposta.

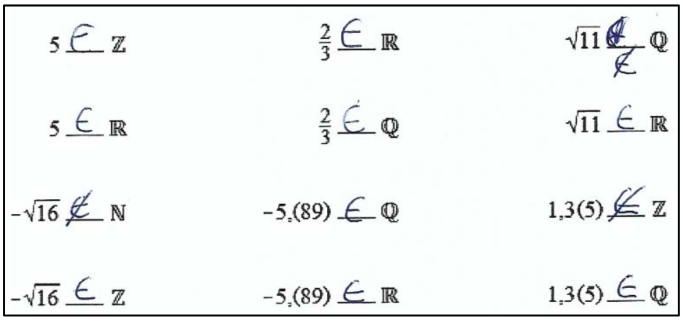


Figura 38 - Resolução de Ricardo e Carla (Tarefa 4, Questão 1)

Na resolução da questão 3.2. da tarefa 3, os alunos Alexandre e Daniela (figura 31) responderam incorretamente que os números $-2,(45)$ e $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ pertenciam a $\mathbb{Z}$ e que os números π e $\sqrt{15}$ pertenciam a $\mathbb{Q}$, mas na resolução da questão 1 da tarefa 4, os alunos já manifestaram resultados diferentes. Henrique e Daniela (figura 39) e Alexandre (figura 40) indicaram corretamente que o número $1{,}3(5)$ não pertence a ℤ, mas apenas Henrique e Daniela afirmaram corretamente que $\sqrt{11}$ não pertence a ℚ. Além destes alunos, mais 9 pares de alunos responderam corretamente que $\sqrt{11}$ não pertence a ℚ. Estas aprendizagens evidenciadas podem dever-se ao enunciado da questão da tarefa 4, em que os alunos não são confrontados com um esquema do qual requer uma interpretação, como tinha acontecido na tarefa 3. No entanto, o aluno Alexandre continua a mostrar dificuldade em saber que a raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito não é um número racional.

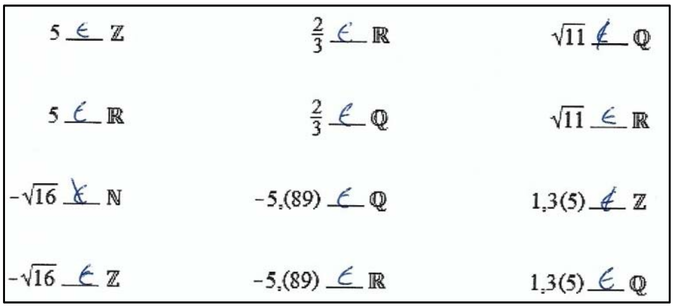


Figura 39 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 4, Questão 1)

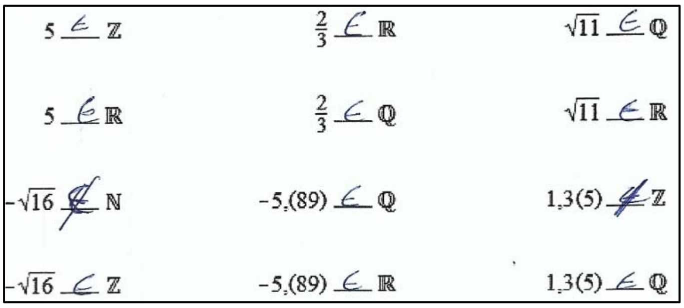


Figura 40 - Resolução de Alexandre (Tarefa 4, Questão 1)

Em relação à questão 2 da tarefa, verifiquei que 10 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa responderam corretamente que ℕ ⊂ ℤ ⊂ ℚ ⊂ ℝ. Entre esses alunos, encontra-se Teresa que já mostra compreender esta relação na sua resolução na figura 41.

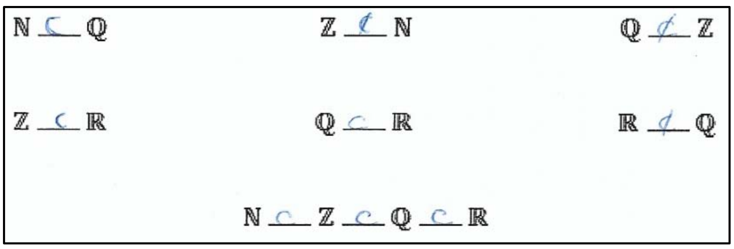


Figura 41 - Resolução de Teresa (Tarefa 4, Questão 2)

No entanto, alguns pares de alunos ainda não se mostraram capazes de reconhecer a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, como é o caso dos alunos André e a Susana (figura 42) que afirmaram que $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}$. Na mesma resolução, os alunos afirmam corretamente que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, o que me surpreendeu ao afirmarem o oposto na última linha. Na primeira linha, os alunos afirmam incorretamente que $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}$, portanto, penso que, para ambos, qualquer relação entre conjuntos numéricos apenas pode seguir uma ordem, o que os levou a concluir incorretamente que $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}$.

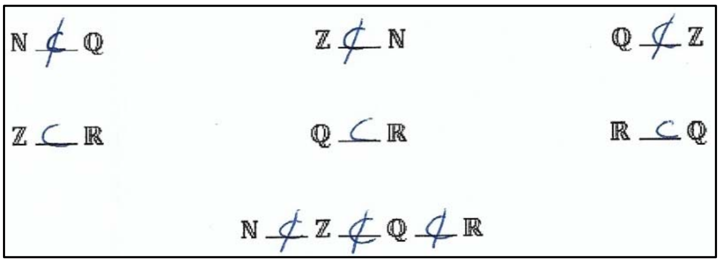


Figura 42 - Resolução de André e Susana (Tarefa 4, Questão 2)

Durante a discussão da questão 2 da tarefa 4, André afirma que como 5 é racional, também é real: "o $\mathbb{R}$ significa número real, e o 5 faz parte do número real individual, os racionais e os irracionais, o 5 é número racional, por isso faz parte do real". Mas ao mesmo tempo sugere ter dificuldades em estabelecer uma conexão entre número e conjunto numérico, pois o aluno reconhece que um número que é racional é real, mas não que o conjunto dos números naturais ao estar contido no dos inteiros, que está contido no dos racionais, que está contido no dos reais, então também está contido no dos reais. Penso que esta declaração do André reforça a ideia de que ele e Susana responderam incorretamente que $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}$ por acreditarem que a relação entre os quatro conjuntos numéricos teria que seguir apenas uma ordem e não pelas relações de ordem entre os números que os constituem.

A meio da unidade de ensino os alunos realizaram um miniteste que continha uma questão na qual se avaliava em que medida estava consolidada a sua aprendizagem dos números reais e que dificuldades ainda se mantinham.

Na resolução da tarefa 4, Ricardo, com a aluna Carla, respondeu corretamente que as dízimas infinitas periódicas pertenciam a $\mathbb{Q}$, afirmando o mesmo na resolução do miniteste, ao escreverem que 6,(13) pertencem a $\mathbb{Q}$ (figura 43), evidenciando que reconhece uma dízima infinita periódica como um número racional.

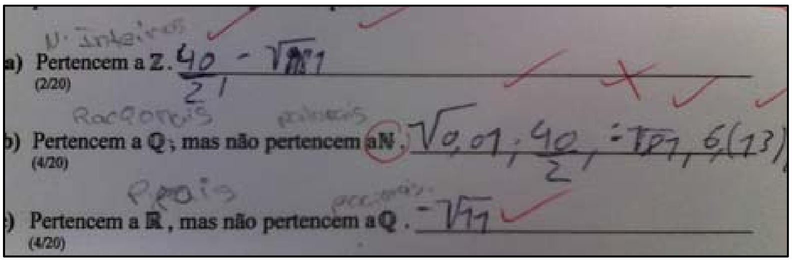


Figura 43 - Resolução de Ricardo e Carla (Miniteste 1, Questão 1)

A aluna Carolina, que anteriormente tinha manifestado dificuldades quanto à noção do conjunto $\mathbb{Q}$, na sua resolução do miniteste (figura 44) responde corretamente que $-\sqrt{11}$ pertence a $\mathbb{R}$, mas não a $\mathbb{Q}$, sugerindo que ultrapassou as suas dificuldades.

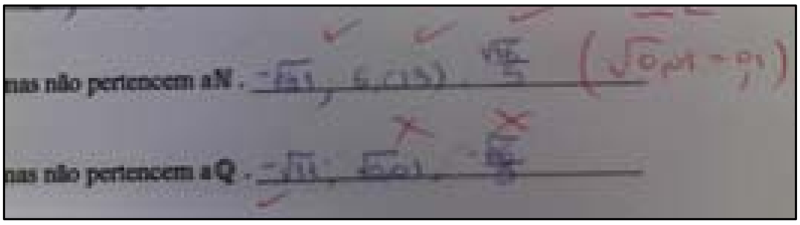


Figura 44 - Resolução de Carolina (Miniteste 1, Questão 1)

O aluno Guilherme, na resolução do miniteste 1 (figura 45), apresenta respostas que sugerem que as suas dificuldades, referidas em anteriores tarefas estão ultrapassadas. O aluno mostra saber que as dízimas finitas e infinitas periódicas é que representam números racionais (6,(13) e $\sqrt{0{,}01}$) e que um número inteiro negativo pertence a $\mathbb{Z}$, mas não a $\mathbb{N}$ ($-\sqrt{81}$). O aluno também mostra saber que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ representa os números reais, excluindo os racionais, pois é o que lhe é pedido na alínea c). É verdade que o aluno também indica que $\frac{\sqrt{16}}{5}$ é um número irracional, mas nada sugere que se deve ao facto de ser um quociente de dois números inteiros, pois assim o aluno também consideraria $\frac{40}{2}$ como irracional, mas sim porque o numerador é uma raiz quadrada e que o aluno não se apercebeu que se tratava de um número natural.

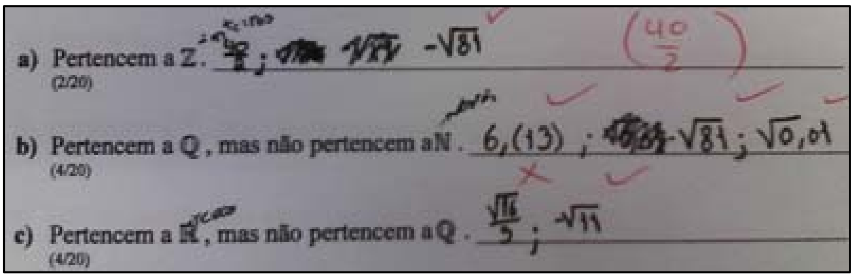


Figura 45 - Resolução de Guilherme (Tarefa 1, Questão 1)

No entanto, na resolução do miniteste, houve alunos que apresentaram respostas incorretas que contradizem aprendizagens das representações de números racionais e irracionais e dos conjuntos numéricos que tinham evidenciado em tarefas anteriores. Henrique e Daniela, por exemplo, no miniteste afirmam que $-\sqrt{11}$ não pertence a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (figura 46), o que parece ser devido a estar representado na forma de raiz quadrada de um número natural, o que ainda causa dificuldades a estes estudantes para fazerem a devida classificação.

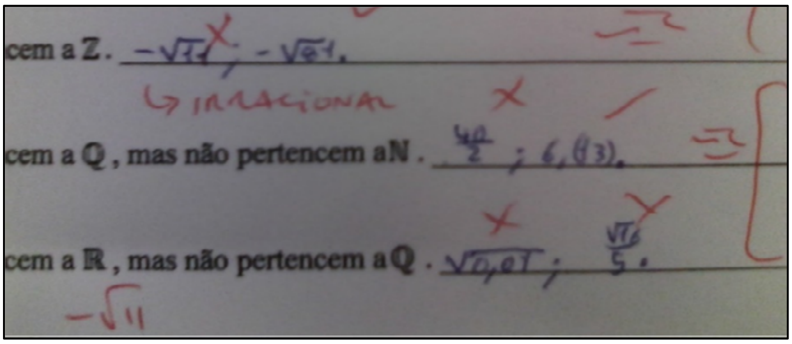


Figura 46 - Resolução de Henrique e Daniela (Miniteste 1, Questão 1)

Resumindo, no final da intervenção letiva, a maioria dos alunos é capaz de identificar números irracionais em várias representações seguindo diferentes estratégias. No início da intervenção letiva, a maioria dos alunos mostrou ter as noções de dízima finita e de dízima infinita periódica apropriadas e de reconhecê-las, o que se revelou útil para esses alunos na realização das tarefas propostas para a lecionação das representações de um número irracional. No final da intervenção letiva, a maioria dos alunos reconhece que um número representado na forma de fração é racional, recorrendo à sua definição. Mas outros alunos tendem a recorrer à representação decimal de um número representado na forma de fração para identificar o tipo de dízima que constitui e assim classificarem-no quanto à sua irracionalidade. No início da intervenção letiva, todos alunos têm conhecimento de que um número representado na forma de fração constitui uma dízima finita ou infinita periódica, e no final da intervenção letiva, a maioria dos alunos mostrou saber, quando o número que dispõem não corresponde a nenhuma destas, que se trata de uma dízima infinita não periódica. Quando o número já está representado na forma de dízima, a maioria dos alunos mostrou-se capaz de o classificar corretamente quanto à sua irracionalidade. Durante a intervenção letiva, os alunos usaram essencialmente duas estratégias para determinar a irracionalidade de um número representado na forma de raiz quadrada de um número natural: nalguns casos recorrem à calculadora para efetuar o cálculo da raiz quadrada do número, convertendo-o numa representação em dízima ou num número inteiro, noutros casos averiguam se o radicando é um quadrado perfeito. No final da intervenção letiva, dos alunos que calculam a raiz quadrada do número natural, a maioria conclui de forma correta se é irracional ou não. A maioria dos alunos também soube determinar a que conjuntos numéricos pertencem os números inteiros e os números representados na forma de fração e de dízima.

Enquanto alguns alunos revelaram bom desempenho com as diferentes representações de um número irracional, outros demonstraram dificuldades. Uma das dificuldades que surgiu foi concetual, visto que alguns alunos classificavam como número irracional todo aquele que pode ser representado por uma dízima infinita, não reconhecendo que existem dois tipos de dízima infinita (periódica e não periódica) e que uma representa um número racional e a outra um número irracional. Outra dificuldade concetual que se evidenciou consistiu em os alunos não conseguirem reconhecer que a raiz quadrada de um número natural é um número irracional baseando-se apenas nessa representação. Os alunos também mostraram dificuldades numéricas e concetuais em determinar o conjunto numérico a que pertencem certos números. As dificuldades numéricas estão relacionadas com a incapacidade de alguns alunos em determinar a que conjunto numérico pertenciam números representados na forma de raiz quadrada de um número natural. Estas dificuldades podem-se dever à incapacidade dos alunos em recorrerem a representações diferentes para esses números ou verificarem se o radicando se tratava ou não de um quadrado perfeito e concluir assim a que conjunto(s) o número pertencia. Verificaram-se, ainda, dificuldades concetuais dos alunos relacionadas com a falta de conhecimento das noções dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

5.2. Representação de números irracionais na reta real

Outro objetivo da unidade de ensino lecionada é os alunos serem capazes de representar números irracionais na reta real, em particular as raízes quadradas de um número natural que não seja um quadrado perfeito. Nesta secção analiso como os alunos representam números irracionais na reta real e, em particular, se compreenderam o processo de construção geométrica utilizado nessa representação. Este processo inclui a construção de um triângulo retângulo em que a sua hipotenusa tem um comprimento igual ao número irracional, e o desenho de uma circunferência centrada na origem da reta real com um raio igual ao comprimento da hipotenusa. No âmbito dessa análise, recorri à tarefa 5 (alíneas a), b), c) e d)), à tarefa 6 (alíneas a) e b)) e ao 1º miniteste (questão 2).

Com a tarefa 5, *Números irracionais e a reta real*, pretendia-se que os alunos compreendessem a impossibilidade de representar números irracionais na reta real com base na sua representação decimal e a necessidade de adotar o processo geométrico acima descrito para a representação de números irracionais na reta real.

Dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa 5, na alínea a) todos foram capazes de identificar o raio de cada circunferência como a hipotenusa do triângulo nela incluído, dos quais 8 conseguiram calcular os valores exatos das hipotenusas, como a que se apresenta na resolução da figura 47. Esta resolução, no entanto, também evidencia dificuldades de natureza simbólica: no cálculo das raízes quadradas de 6 e 10, a aluna continua a deixar a incógnita h elevada ao quadrado e ao substituir o valor de um dos catetos no cálculo da raiz quadrada de 6, comete o mesmo erro. A sua resolução sugere que a aluna, apesar de conhecer o significado do cálculo da raiz quadrada de um número, revela dificuldades no uso de representação simbólica.

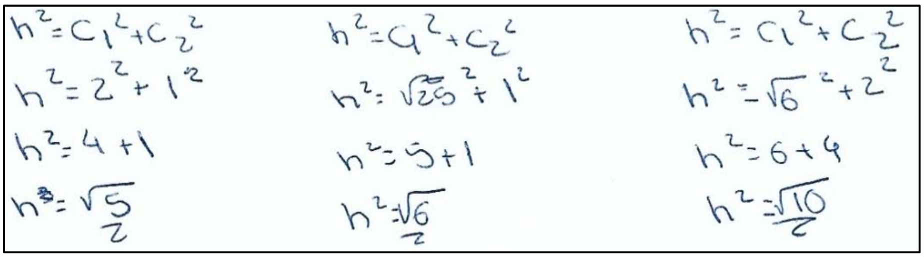


Figura 47 - Resolução de Carolina (Tarefa 5, Alínea a))

Os restantes 6 pares de alunos, responderam incorretamente, evidenciando dificuldades de natureza numérica e simbólica. Houve 3 pares de alunos que cometeram erros no cálculo dos quadrados dos catetos, e, assim, também no da hipotenusa. Contudo, 11 em 14 pares de alunos souberam aplicar de forma correta o Teorema de Pitágoras, o que me deixou satisfeito, considerando a sua importância na representação de números irracionais na reta real. Um dos exemplos de dificuldade simbólica foi a resolução de Constança (figura 48), em que, no cálculo das hipotenusas dos triângulos retângulos, a aluna apresenta valores aproximados, em vez dos exatos, quando estes é que são necessários para cálculos seguintes.

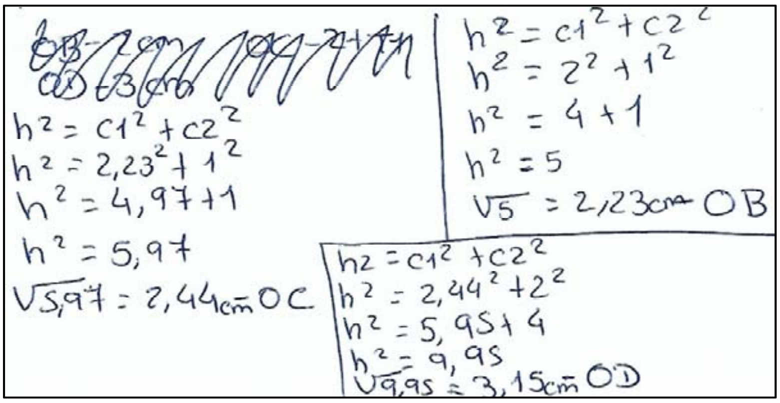


Figura 48 - Resolução de Constança (Figura 5, Alínea a))

Retomando o trabalho dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa, uma das dificuldades que alguns manifestaram na resolução da alínea a) foi a identificação do segmento $[OB]$ como o raio de uma das circunferências. A dificuldade não residiu no desconhecimento da noção de raio de uma circunferência, pois identificaram outros segmentos que constituíam raios da circunferência, mas em identificar aquele que seria útil para a resolução do problema. Esta dificuldade pode dever-se ao facto de haver várias figuras geométricas e, consequentemente, bastantes segmentos de retas, tornando a figura do enunciado do problema suficientemente complexa ao ponto de os alunos não estarem acostumados em resolver questões com figuras semelhantes. Um exemplo desta situação foi o caso de Ricardo e Carla, como se apresenta no excerto seguinte de um diálogo entre mim e esses alunos:

Professor: então, como é que determinamos o raio? Onde é que está o raio desta circunferência [circunferência de raio $\overline{OB}$]?

Ricardo: é isto [$\overline{OS1}$].

Professor: consegues localizar outro?

Ricardo: aqui [$\overline{OA}$]?

Professor: olhem bem, daqui [Ponto O] a aqui [Ponto A], isto é o raio?

Ricardo: ah, não.

Professor: olhem bem, daqui a aqui, isto é o raio [$\overline{OB}$]?

Ricardo: ah…

O enunciado desta alínea não se revelaria muito acessível aos alunos pois eles teriam de saber associar o raio de cada uma das circunferências às hipotenusas dos respetivos triângulos, e ao Teorema de Pitágoras. O facto de serem conhecidos os catetos do triângulo retângulo $[OAB]$ também não os ajudou a aperceberem-se que o eventual cálculo da hipotenusa de $[OAB]$ permitira obter o raio da primeira circunferência, o que revela as dificuldades dos alunos em resolver com problemas que exige estabelecer conexões e recordar vários conhecimentos matemáticos.

Relativamente à alínea b) verifiquei que 10 dos 14 pares de alunos apresentaram uma resposta em que reconhecem que a abcissa do ponto de interseção de cada circunferência com a reta real, localizado à direita da origem da reta, tem valor igual ao raio dessa circunferência ou à hipotenusa do triângulo retângulo nela inscrito. Desses 10 pares de alunos, 6 apresentaram os valores das abcissas dos pontos de interseção de cada uma das circunferências com a reta real, localizados à direita da origem desta, como na resolução de Alexandre (figura 49).

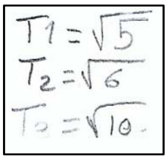


Figura 49 - Resolução de Alexandre (Tarefa 5, Alínea b))

A seguir apresenta-se um excerto da conversa que tive com o Alexandre durante a resolução da alínea b), em que manifestou dificuldades em concluir que a abcissa do ponto de interseção de cada circunferência com a reta real, localizado à direita da origem da reta, tem valor igual ao raio dessa circunferência. Nessa conversa, eu questiono o aluno até ele conseguir fazer essa conclusão com a circunferência de menor raio, no qual se torna bem-sucedido. No entanto, em vez de responder à questão enunciando uma regra que relacione a abcissa do ponto de interseção de cada circunferência com a reta real, localizado à direita da origem da reta, com o raio da circunferência, limita-se a fazer a correspondência entre os respetivos valores. A resposta não deixa de estar correta, mas a meu ver, é indicativa de que o aluno ainda não está familiarizado a apresentar generalizações de regras que se podem estabelecer entre objetos matemáticos.

Professor: qual é a abcissa?

[O aluno mantém-se em silêncio].

Professor: uma coisa, quanto é que é isto aqui [$\overline{OT1}$]?

Alexandre: é o raio.

Professor: então a abcissa do T1…

Alexandre: já percebi!

Professor: então diz lá.

Alexandre: então, esta abcissa [T1] é o valor, é a raiz quadrada de 5, esta abcissa [T2] é a raiz quadrada de 6 e esta abcissa [T3] é a raiz quadrada de 10.

Contrariamente à resolução apresentada na figura 49, os restantes 4 pares de alunos responderam à alínea b), enunciando uma regra que estabelecesse que o valor da abcissa do ponto de interseção de cada circunferência com a reta real, localizado à direita da origem da reta, é igual ao raio da circunferência, ou ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo nela inscrito. A resposta de Henrique e Daniela (figura 50) foi única, em que os alunos identificam corretamente as abcissas dos pontos como os valores correspondentes aos comprimentos das hipotenusas dos triângulos retângulos, enquanto os restantes 3 pares de alunos indicam corretamente que as abcissas dos pontos têm um valor igual aos comprimentos dos raios das circunferências, como foi o caso de Tomás e Vera (figura 51).

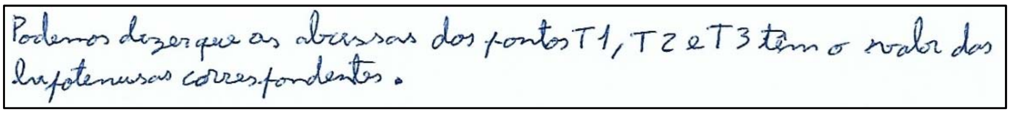


Figura 50 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 5, Alínea b))

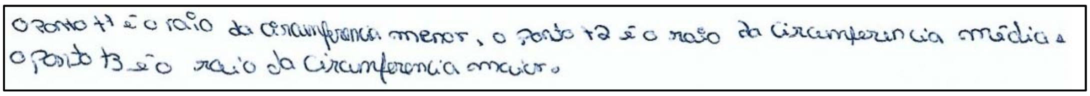


Figura 51 - Resolução de Tomás e Vera (Tarefa 5, Alínea b))

Houve 4 pares de alunos que não apresentaram uma resposta correta, que se deveu a diferentes tipos de dificuldades. Um dos pares apresentou uma resposta incorreta devido a dificuldades numéricas, pois na resolução da alínea a) não apresentou o valor exato ou apresentou um valor incorreto das medidas dos raios, e como os valores não coincidem com os apresentados na alínea b), não é possível aferir se os alunos foram capazes de concluir que as abcissas eram iguais aos raios das circunferências ou aos comprimentos das hipotenusas dos triângulos retângulos. Madalena e Margarida (figura 52) apresentaram uma resposta correta, mas não estabelecem nenhuma relação com a resolução feita na alínea a) ou com base na análise da figura do enunciado, e que a meu ver não contribui para a aprendizagem da representação de números irracionais na reta real, quando comparada com as respostas das figuras 49, 50 e 51.

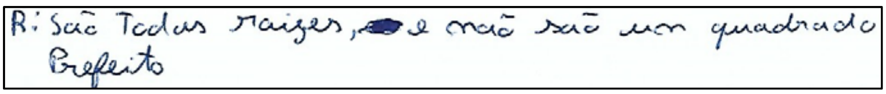


Figura 52 - Resolução de Madalena e Margarida (Tarefa 5, Alínea b))

Cada circunferência da figura interseta a reta real em dois pontos distintos e na alínea c), pretendia-se que os alunos reconhecessem que as abcissas desses pontos são simétricas. Na análise verifiquei que dos 12 pares de alunos que responderam à alínea c), 6 apresentaram uma resposta correta, semelhante à de Diogo e Marta (figura 53). A justificação apresentada pelos alunos sugere que eles identificam que a distância dos pontos de interseção das circunferências com a reta real localizadas à direita da origem da reta real é igual à dos pontos de interseção localizados à esquerda da origem da reta real, mas que estes têm abcissas com valores negativos.

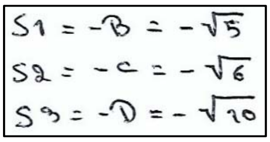

$S1 = -B = -\sqrt{5}$
$S2 = -C = -\sqrt{6}$
$S3 = -D = -\sqrt{10}$

Figura 53 - Resolução de Diogo e Marta (Tarefa 5, Alínea c))

O aluno Guilherme também foi um dos que apresentou uma resposta semelhante à que se apresenta na figura 53 e, com base no excerto da conversa que tive com ele no âmbito de apoio às dificuldades que ele manifestou durante o trabalho autónomo, foi evidente que ele recorreu à mesma estratégia que Diogo e Marta.

Guilherme: então, aqui a aqui, é $\sqrt{5}$, daqui a aqui é $\sqrt{6}$…

Professor: então, qual é a abcissa de S1?

Guilherme: então… é a de T1.

Professor: então a abcissa de S1 é qual?

Guilherme: é $\sqrt{5}$.

Professor: então aqui [T1] é $\sqrt{5}$, aqui [S1] também é $\sqrt{5}$?

Guilherme: não, menos, $-\sqrt{5}$.

Alguns alunos não apresentaram uma resposta correta devido a diferentes tipos de dificuldades. Carolina manifesta, a meu ver, dificuldades de interpretação, pois apesar de no enunciado da tarefa pedir especificamente para indicar os valores das abcissas dos pontos de interseção das circunferências com a reta real, mas localizadas à esquerda da origem da reta real, a aluna (figura 54) limita-se a referir como as obter.

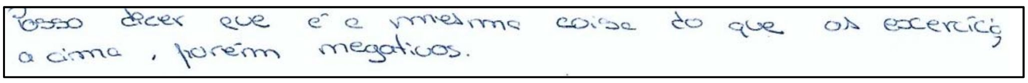

Posso dicer que é a mesma coisa do que os exercício a cima, porém negativos.

Figura 54 - Resolução de Carolina (Tarefa 5, Alínea c))

Um outro tipo de dificuldades que observei na maioria das resoluções dos 8 pares de alunos que não apresentaram uma resposta correta foi de natureza numérica. Como na alínea a) da tarefa, não foram apresentados os valores exatos dos raios, também não o foram na alínea b) e na alínea c), como no caso de Teresa (figura 55). Outras dificuldades de natureza numérica, que considero mais limitativas, são evidentes na resposta dos alunos Henrique e Daniela (figura 56), que apresentam valores incorretos, pois na resolução da alínea a) também não efetuaram as operações matemáticas corretamente, como a potenciação e a raiz quadrada. Depois, na alínea c) indicaram incorretamente o simétrico da raiz quadrada. Estes alunos demonstram falta de conhecimentos prévios, nomeadamente da noção de valor exato, o que prejudicou a resolução da questão, ainda que a sua justificação demonstra um raciocínio correto.

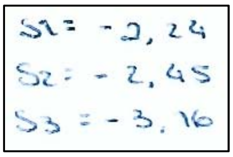


Figura 55 - Resolução de Teresa (Tarefa 5, Alínea c))

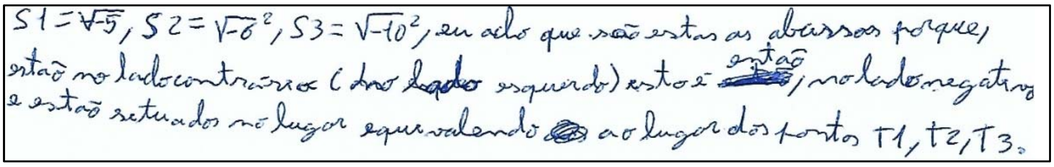


Figura 56 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 5, Alínea c))

Apesar das respostas apresentadas nas figuras 54, 55 e 56 não estarem totalmente corretas, a sua análise evidencia que a maioria dos alunos soube identificar as abcissas dos pontos simétricos em relação à origem da reta real.

Com a alínea d), pretendia-se que os alunos reconhecessem que a construção de um triângulo retângulo cuja base está contida na reta real, permite representar na reta real um ponto com abcissa igual ao comprimento da hipotenusa desse triângulo. Na análise das resoluções, verifiquei que 3 dos 14 pares não iniciaram a resolução da alínea, e outros 3 iniciaram, mas não a concluíram. Tendo em conta que os alunos não iniciaram a resolução da alínea e), a falta de tempo pode ter sido um fator para estes 6 pares de alunos não terem iniciado ou concluído a resolução da alínea d). Dos 8 pares de alunos que concluíram a alínea d), verifiquei que 5 completaram a tabela com todos os valores corretos, como na figura 57. Nas três primeiras linhas, os alunos identificaram corretamente as dimensões dos triângulos retângulos, que se apresentavam na figura do enunciado ou na resolução de alíneas anteriores, e nas duas linhas que se seguem, os alunos souberam calcular corretamente as dimensões desconhecidas pelo Teorema de Pitágoras, e apresentar os valores exatos. Para qualquer linha, os alunos foram capazes de concluir que os valores das abcissas dos pontos de interseção das circunferências com a reta real, localizados à direita da origem da reta real, são iguais aos comprimentos das hipotenusas dos triângulos retângulos que estão inscritos nas circunferências.

Ponto	Cateto Maior	Cateto Menor	Hipotenusa	Abcissa do Ponto
T1	2	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
…	…	…	…	…
T2	$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$
…	…	…	…	…
T3	$\sqrt{6}$	2	$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$
…	…	…	…	…
T4	3	2	$\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$
…	…	…	…	…
T5	4	1	$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$

Figura 57 - Resolução de André e Susana (Tarefa 5, Alínea d))

Das restantes 3 resoluções, verifiquei que os alunos completaram a tabela com valores aproximados ou valores incorretos que obtiveram na resolução da alínea a) da tarefa, como os alunos Henrique e Daniela (figura 58).

Ponto	Cateto Maior	Cateto Menor	Hipotenusa	Abcissa do Ponto
T1	2	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
…	…	…	…	…
T2	$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{6}^2$	$\sqrt{6}^2$
…	…	…	…	…
T3	$\sqrt{6}^2$	2	$\sqrt{10}^2$	$\sqrt{10}^2$
…	…	…	…	…
T4	3	2	$\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$
…	…	…	…	…
T5	4	1	$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$

Figura 58 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 5, Alínea d))

Dos 8 pares de alunos que concluíram a alínea d), alguns manifestaram dificuldades durante o trabalho autónomo em preencher as últimas duas linhas da tabela pelo facto destes valores serem de triângulos que não se encontravam representados na figura da tarefa. Com a falta de apoio visual, os alunos mostraram dificuldades em duas situações. Numa situação os alunos não perceberam que era necessário utilizar o Teorema de Pitágoras para obter as medidas dos catetos e da hipotenusa. Mas no apoio às dificuldades dos alunos durante o trabalho autónomo, ao focá-los no padrão existente nas três primeiras linhas da tabela, os alunos reconheceram que tinham de recorrer ao Teorema de Pitágoras para determinar os valores em falta, como evidenciado no diálogo seguinte com Teresa:

Teresa: está, está. Stôr, onde é que está o T4 e o T5?

Professor: T4, T5 não têm nada a ver com a figura, são dois pontos apresentados…

Teresa: como é que podemos preencher?

Professor: então…

Teresa: está aqui o cateto maior, menor e a hipotenusa.

Professor: então isso é o quê?

Teresa: ah! São as do triângulo, do triângulo, do Teorema de Pitágoras. Então nós não temos valores.

Professor: ai não?! [Eu aponto para os valores dos catetos na linha do ponto T4] Ai não?! [Eu aponto para os valores do cateto menor e da hipotenusa na linha do ponto T5]

Teresa: ah, ok.

Numa outra situação, alguns alunos não reconheceram que o valor da abcissa do ponto é igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo, mas ao pedir-lhes também para observarem o padrão existente na tabela, eles ultrapassaram as suas dificuldades, como evidenciado no diálogo seguinte com Diogo e Carla:

Diogo: stôr, como é que nós encontramos a abcissa de um ponto, sendo que este não existe?

Professor: então, olha aqui…

Diogo: a hipotenusa é igual à abcissa do ponto?

Não existem evidências de que as dificuldades de Diogo e Carla sejam representativas da turma, mas também de que essas dificuldades não tenham sido sentidas pelos restantes colegas. Na verdade, não existem evidências de que todos os alunos estabeleceram a relação entre a abcissa do ponto com recurso à figura ou apenas com base no padrão na tabela, mas durante a discussão da tarefa nenhum aluno manifestou dúvidas quanto à sua resolução. Portanto, tenham sido utilizados ou não valores exatos no preenchimento da tabela, há a possibilidade de a maioria dos alunos ter reconhecido que a hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito numa circunferência, cuja base está contida na reta real, permite representar na reta real um ponto com abcissa igual ao comprimento da hipotenusa desse triângulo.

Com a tarefa 6, *Construindo números irracionais na reta real*, pretendia-se que os alunos mobilizassem conhecimentos prévios do trabalho realizado na tarefa 5 para representarem na reta real raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos. Na alínea a) pedia-se que os alunos, recorrendo a material de desenho disponibilizado, ou seja, régua e compasso, representassem na reta real o número $\sqrt{13}$. Este número foi escolhido especificamente para a primeira alínea da tarefa 6 porque as medidas do triângulo foram apresentadas na tabela da alínea d) da tarefa 5 e, caso os alunos não fossem capazes de encontrar as medidas de dois catetos de um triângulo retângulo com uma hipotenusa de comprimento $\sqrt{13}$, poderiam recorrer a essa alínea.

Numa análise das 14 resoluções da tarefa 6, verifiquei que 11 pares de alunos apresentaram uma resposta correta e completa à alínea a), isto é, construíram um triângulo retângulo em que a hipotenusa tinha comprimento $\sqrt{13}$, traçaram uma circunferência ou um arco de circunferência com raio $\sqrt{13}$, e concluíram que a abcissa do ponto de interseção da circunferência com a reta real localizado à direita da sua origem é $\sqrt{13}$. A resolução de Catarina na figura 59, é um exemplo dessas resoluções.

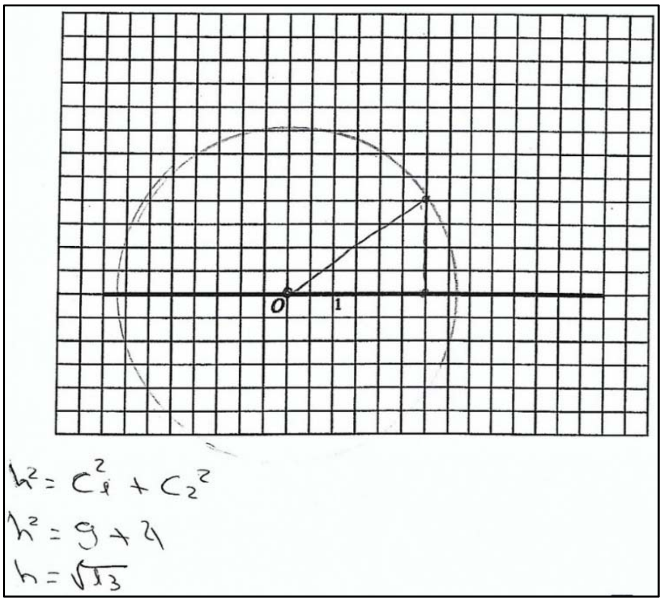


Figura 59 - Resolução de Catarina (Tarefa 6, Alínea a))

Embora tenha havido um grande número de respostas corretas à alínea a), os alunos que as apresentaram manifestaram dificuldades em iniciar o processo de representação do número $\sqrt{13}$ na reta real. No apoio às dificuldades durante o trabalho autónomo, sugeri aos alunos que observassem a figura do enunciado da tarefa 5, que tinham resolvido na aula anterior, e através do meu questionamento, eles notaram que o valor das abcissas dos pontos da figura do enunciado eram raízes quadradas de números naturais e que era igual ao comprimento das hipotenusas dos triângulos. Os alunos perceberam assim que tinham de construir um triângulo retângulo, mas ainda assim não sabiam que medidas utilizar. Sugeri-lhes para analisarem a tabela da alínea d) da tarefa 5 e, novamente através do meu questionamento, os alunos identificaram as medidas que necessitavam, tal como, evidenciado no diálogo que tive com André e Susana que se apresenta a seguir.

André: stôr, não estou a perceber…

Professor: então, reparem bem, vocês aqui, o T1 era quanto?

André: o T1 era…, $\sqrt{5}$.

Professor: $\sqrt{5}$. Então, como é que vocês punham $\sqrt{5}$ aqui? Vocês viram se havia mais alguma coisa que medisse $\sqrt{5}$?

André: sim.

Professor: o quê? Então estava aqui a hipotenusa e depois a abcissa, certo? Então precisamos do quê?

André: de um triângulo retângulo para construir $\sqrt{13}$.

Professor: e esse triângulo retângulo, sabes alguma coisa sobre os lados?

André: sei a hipotenusa…

Professor: que é?

André: que é 13, é $\sqrt{13}$…

Professor: ok, então já têm a hipotenusa e a hipotenusa é $\sqrt{13}$, quanto é que vão medir os catetos?

André: 13, não, não, 3…

Susana: 3 e 2.

A resolução destes alunos, apresentada na figura 60, sugere que compreenderam que a representação da raiz quadrada de um número natural é possível com a construção de um triângulo retângulo cujo comprimento da hipotenusa é igual ao valor dessa raiz quadrada.

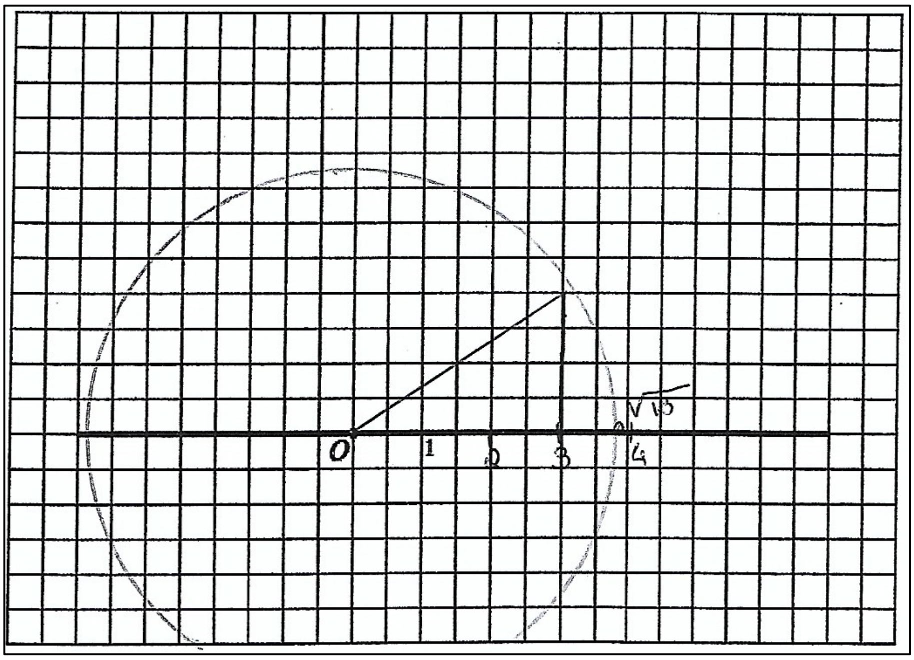


Figura 60 - Resolução de André e Susana (Tarefa 6, Alínea a))

O aluno Alexandre apresentou uma das 11 resoluções com a representação correta de $\sqrt{13}$ na reta real, mas manifestou dificuldades durante o trabalho autónomo. O aluno recorreu à tarefa 5 para reconhecer a necessidade de construir um triângulo retângulo, tendo determinado as medidas dos catetos, mas depois não soube como concluir o processo, ou seja, em compreender o papel da circunferência na representação de números irracionais na reta real. Sugeri ao aluno para analisar a figura do enunciado da tarefa 5 e, através do questionamento, ele associou a rotação que o vértice do triângulo onde se intersetam a hipotenusa e a altura do triângulo teria de efetuar, à circunferência representada na figura.

Professor: então, olhem, isto aqui [hipotenusa] mede $\sqrt{13}$… então e agora como é que passamos para ali [reta real]?

Alexandre: ah, isto aqui [hipotenusa] é o tamanho de dois pontos? Ou seja, este [distância da origem ao ponto com abcissa $\sqrt{13}$] também vai ser $\sqrt{13}$.

Professor: então e depois para passar para ali [reta real], como é que vai, Alexandre? Põe lá aqui [hipotenusa] os dedos, como é que passas para ali [reta real]?

Alexandre: um ângulo?

[Eu pego no compasso e entrego ao Alexandre, que coloca as pontas nos extremos na base do triângulo]

Professor: aí? De certeza? Então, qual é o comprimento que tu disseste que querias?

[Alexandre coloca as pontas do compasso nos extremos da hipotenusa, mas coloca a ponta com o lápis na origem da reta real].

Professor: de certeza que o bico é aí?

Alexandre: ah… Ah!

O aluno reconhece assim o papel da circunferência na representação de $\sqrt{13}$ na reta real que, pela sua reação e resolução (figura 61), constituiu uma aprendizagem para o aluno.

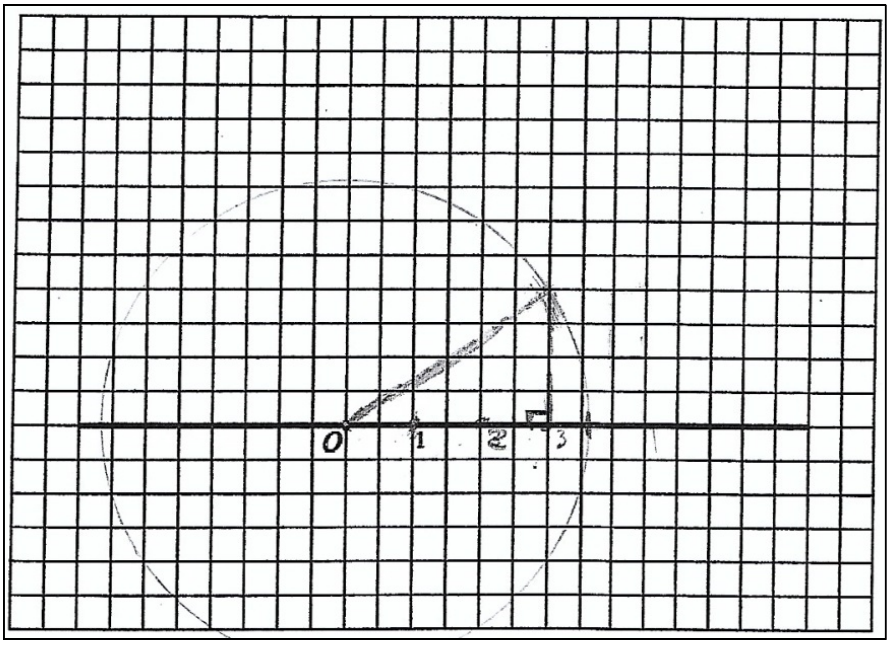


Figura 61 - Resolução de Alexandre (Tarefa 6, Alínea a))

Apesar de 11 das resoluções da alínea a) estarem completas e corretas, existem evidências de ter havido mais dois pares de alunos que compreenderam o processo de representação de números irracionais na reta real, mas cuja resolução não estava totalmente correta por terem interpretado a escala da figura incorretamente. A construção de um triângulo retângulo, cuja base está contida na reta real, com uma hipotenusa de comprimento $\sqrt{13}$, e de uma circunferência que passa pelo ponto onde se intersetam a altura e a hipotenusa do triângulo na resolução de Diogo e Carla (figura 62) sugere compreensão do processo de construção geométrica necessário para a representação de $\sqrt{13}$ na reta real, embora a resposta final esteja incorreta por um erro de interpretação da escala na figura.

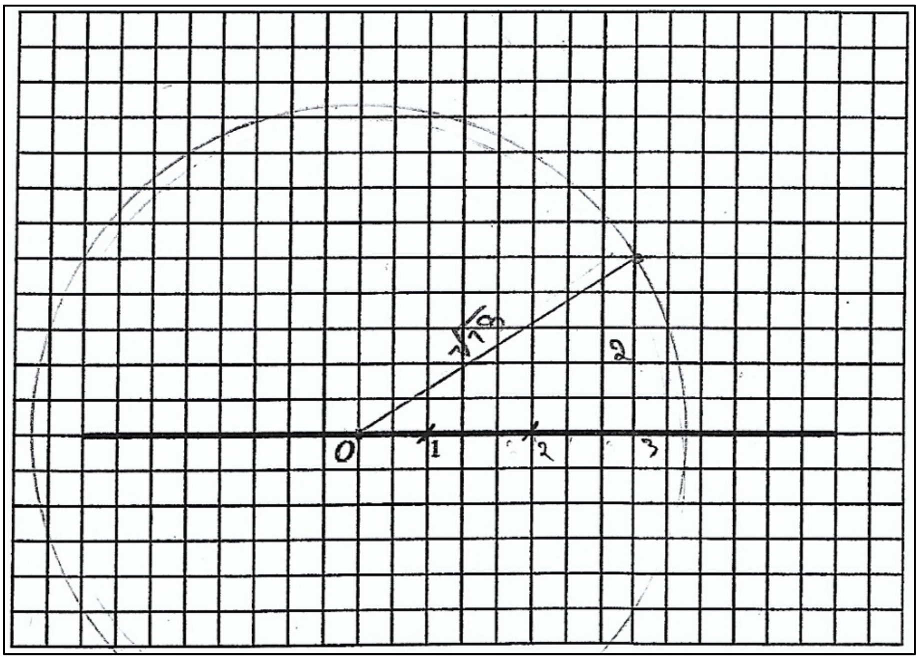


Figura 62 - Resolução de Diogo e Carla (Tarefa 6, Alínea a))

Na alínea b), pretendia-se que os alunos representassem $\sqrt{29}$ na reta real, caso a representação de $\sqrt{13}$ na reta real não fosse suficiente para os alunos se apropriarem do processo de construção geométrico para a representação de números irracionais na reta real. Dos 14 pares de alunos, 5 não apresentaram qualquer evidência de terem começado a resolver a alínea b) e dos restantes 9 pares, apenas 4 apresentaram uma resposta correta e completa, semelhante à de Madalena e Margarida (figura 63). Esta resolução, em que as alunas constroem um triângulo retângulo com a base contida na reta real e cuja hipotenusa tem comprimento $\sqrt{29}$, e depois traçam uma circunferência que passa pelo ponto de interseção da altura do triângulo com a hipotenusa, sugere que estes alunos se apropriaram do processo de construção geométrica para a representação de números irracionais na reta real.

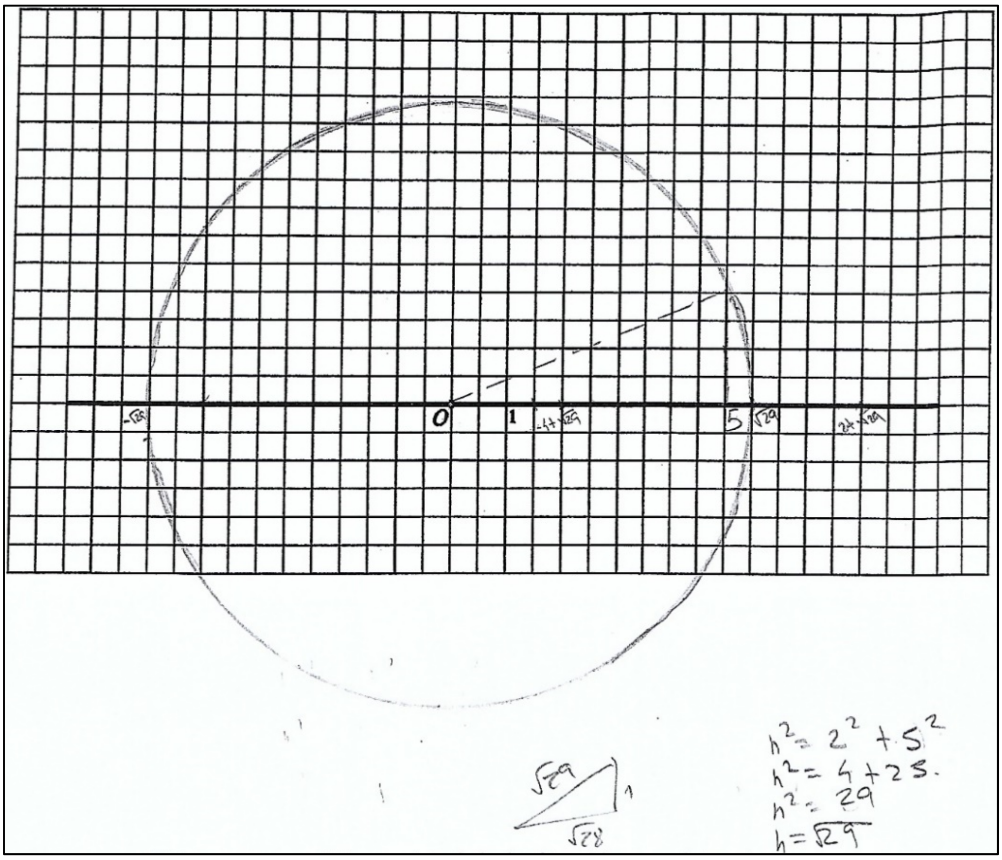


Figura 63 - Resolução de Madalena e Margarida (Tarefa 6, Alínea b))

A Teresa foi uma das alunas que apresentou uma resposta correta (figura 64), não tendo repetido o erro cometido na alínea a) por má interpretação da escala da figura, o que me permite crer que o erro pode ter sido devido a distração e não à existência de dificuldades.

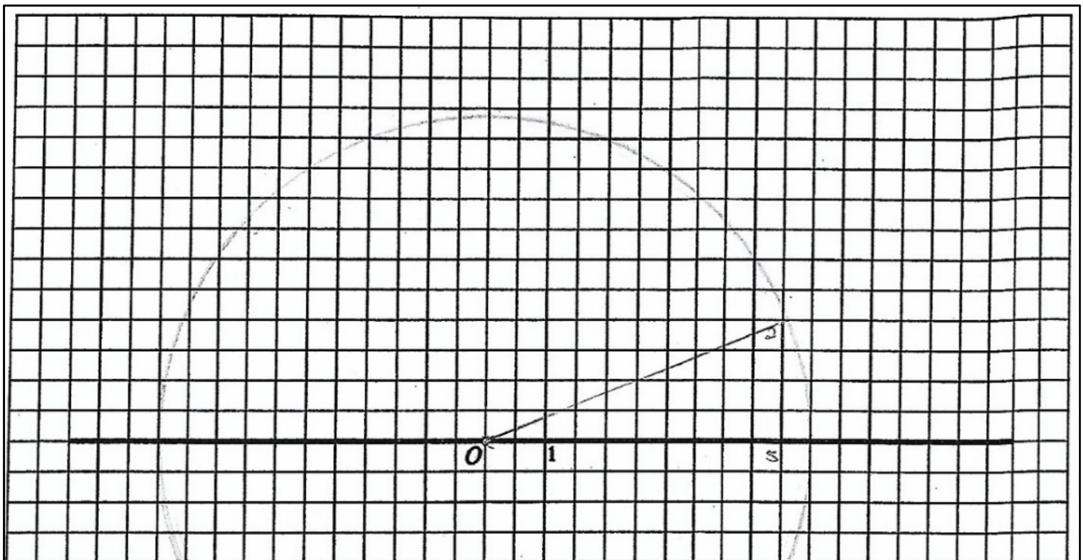


Figura 64 - Resolução de Teresa (Tarefa 6, Alínea b))

Destes 9 pares ainda houve alguns alunos que não concluíram as suas resoluções e, portanto, penso que o número bastante reduzido de respostas corretas na alínea b) pode ter sido influenciado por falta de tempo. Esta aula também foi a primeira em que os alunos contactaram com o processo de construção geométrica para representar números irracionais na reta real, o que pode ter consumido uma quantidade de tempo considerável. E esta hipótese também se pode aplicar aos outros 5 pares de alunos que não iniciaram a sua resolução.

Os alunos André e Susana, cuja resolução se apresenta na figura 65, constituem um dos pares que não concluiu a sua resolução pois não chegaram a traçar a circunferência, mas que nela evidenciam elementos de aprendizagem. Os alunos construíram um triângulo retângulo que respeita os valores necessários para a representação de $\sqrt{29}$ na reta real, ao contrário das dificuldades que tinham manifestado a este respeito na resolução da alínea a), como está expresso no diálogo anteriormente apresentado.

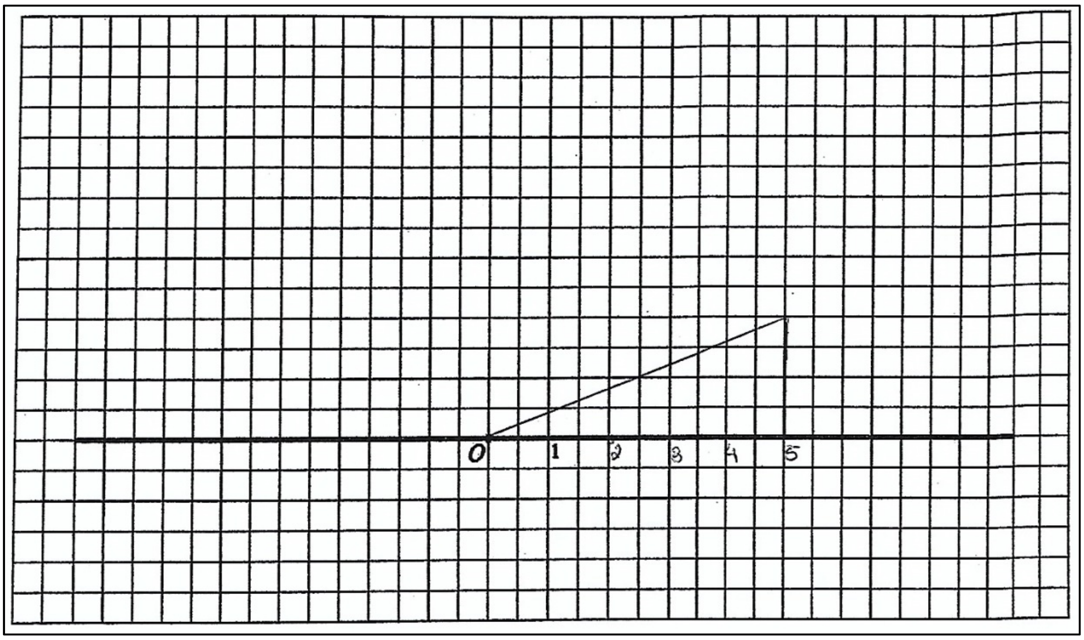


Figura 65 - Resolução de André e Susana (Tarefa 6, Alínea b))

Dos 9 pares de alunos que iniciaram a resolução da alínea b), houve dois que não concluíram a resolução, sendo um deles o par André e Susana, enquanto os restantes apresentaram respostas incorretas. A dificuldade principal foi a interpretação incorreta da escala da figura, sendo um dos pares que cometeu esse erro os alunos Diogo e Marta (figura 66), mas tal como referi na análise da sua resolução da alínea a), os alunos parecem ter compreendido o processo de construção geométrica para a representação de números irracionais na reta real.

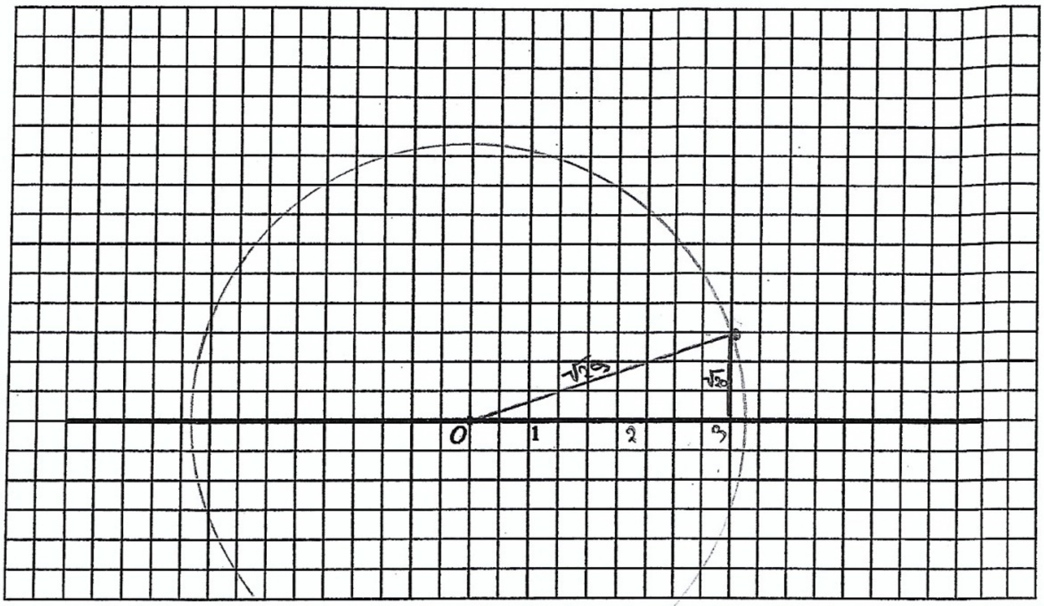


Figura 66 - Resolução de Diogo e Marta (Tarefa 6, Alínea b))

Quanto à alínea b1), houve 10 pares de alunos que não apresentaram uma resposta a nenhuma das suas subalíneas. Penso que isto se deveu, principalmente à falta de tempo, pois os alunos dedicaram grande parte do tempo do trabalho autónomo à resolução da alínea a) pelos motivos referidos atrás, e como a grande maioria não apresentou uma resposta completa à alínea b), penso que não tiveram assim tempo para dar início à resolução da alínea b1). Dos 4 pares que iniciaram a resolução da alínea b1), três representaram corretamente o número $-\sqrt{29}$ na reta real como era pedido na subalínea b11), incluindo Madalena e Margarida (figura 67), que identificaram corretamente $-\sqrt{29}$ como a abcissa do ponto de interseção da circunferência centrada na origem da reta real e raio $\sqrt{29}$, mas que se localiza à esquerda da origem da reta real.

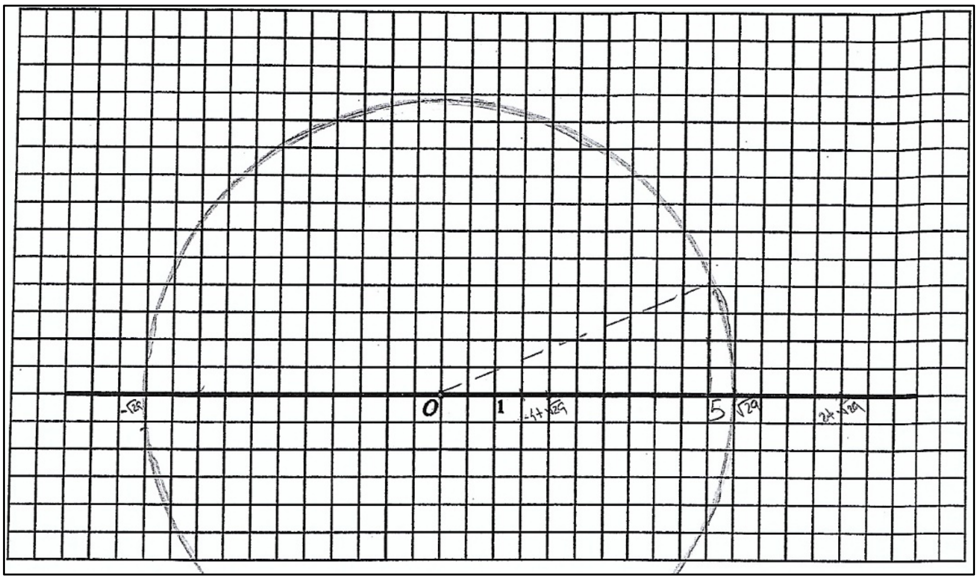


Figura 67 - Resolução de Madalena e Margarida (Tarefa 6, Alínea b11))

Alexandre foi um dos 4 pares de alunos que também iniciou a resolução da subalínea b11) e que respondeu corretamente à alínea c) da tarefa 5, mas ao contrário dos colegas, recorreu à construção de um triângulo retângulo para representar $-\sqrt{29}$ na reta real. A resolução de Alexandre (figura 68) evidencia que o diálogo que tive com ele, no qual ele demonstrou compreender o papel da circunferência na representação de números irracionais na reta real, gerou um resultado positivo na sua aprendizagem. Apesar dos alunos, na resolução das alíneas a) e b) da tarefa 6, terem recorrido à construção de triângulos retângulos para representar números irracionais na reta real, Alexandre não usou a mesma estratégia de resolução que os colegas, e optou por adotar o mesmo procedimento que utilizou nas alíneas a) e b), que o conduziu à resposta correta.

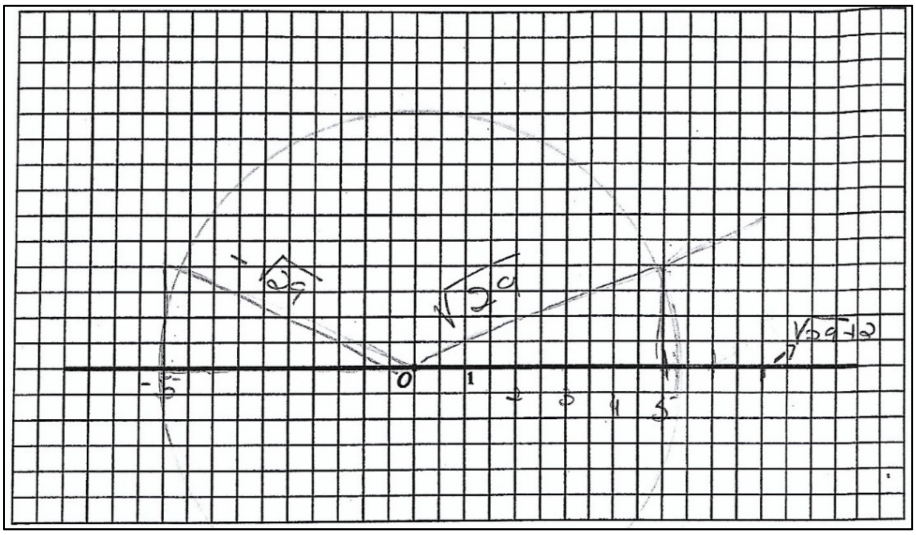


Figura 68 - Resolução de Alexandre (Tarefa 6, Alíneas b) e b11))

Apesar de Alexandre não assinalar o ponto na reta real e escrever o valor da sua abcissa, mas escrevê-lo na hipotenusa, o que está incorreto, a intervenção dele na discussão final desta alínea, que apresento a seguir, sugere que ele reconheceu que a representação de $-\sqrt{29}$ pode ser feita com a construção de um triângulo retângulo obtido com a reflexão, em relação à reta $x = 0$, do triângulo que se utilizaria para representar $\sqrt{29}$ na reta real.

[Alexandre coloca o indicador esquerdo na origem e o direito no ponto de abcissa $\sqrt{29}$ e desloca o indicador direito para o ponto de abcissa $-\sqrt{29}$].

Alexandre: invertemos o triângulo.

Tomás: o que é que ele disse?

Alexandre: pegamos no triângulo e passamos para…

Tomás: ah, ok.

Professor: então, uma coisa, o que o Alexandre fez com os triângulos, é o quê?

Alguns alunos: reflexão.

Dos 4 pares de alunos que resolveram a alínea b11), apenas 2 apresentaram uma resolução às subalíneas b12) e b13). Os alunos Tomás e Vera (figura 69) representaram corretamente $2+\sqrt{29}$ e $-4+\sqrt{29}$ na reta real, os alunos efetuaram uma translação do triângulo retângulo utilizado na representação de $\sqrt{29}$ na reta real segundo os vetores $\vec{u} = (2,0)$ e $\vec{v} = (-4,0)$ para representar $2+\sqrt{29}$ e $-4+\sqrt{29}$, respetivamente, e depois traçaram as respetivas circunferências.

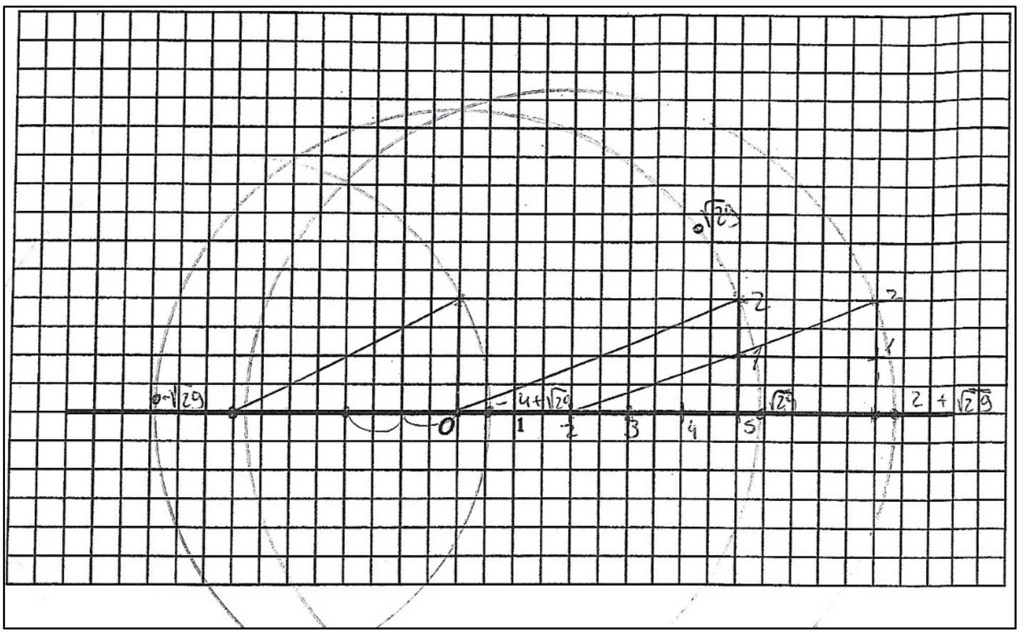


Figura 69 - Resolução de Tomás e Vera (Tarefa 6, Alíneas b) e b1))

Apesar de terem apresentado uma resposta correta, os alunos mostraram dificuldades durante o trabalho autónomo em como representar $2+\sqrt{29}$ e $-4+\sqrt{29}$, como mostra o diálogo seguinte entre mim e o aluno Tomás. O aluno começa por manifestar dificuldades em perceber que tinha de efetuar translações sobre o triângulo retângulo que utilizou para representar $\sqrt{29}$ na reta real, mas depois chega a essa conclusão.

Professor: aí é $\sqrt{29}$, certo?

Tomás: sim.

Professor: se quiseres agora ir para $2+\sqrt{29}$, o que é que fazes?

Tomás: então vai… devia ser para trás.

Professor: para trás?

Tomás: porque o número vai ser maior.

Professor: então se é maior, como é que vai para trás?

Tomás: não, então neste caso vai ter que ir para a frente.

Professor: tens um ponto de abcissa 1, se tu quiseres ir para o ponto de abcissa 4…

Tomás: tenho que andar 3 para a frente.

Professor: então, aqui é$\sqrt{29}$, certo? Então se queres $2+\sqrt{29}$, tens que fazer o quê?

Tomás: assim [Tomás indica com a caneta que tem de efetuar uma translação].

Professor. então, o teu triângulo vai agora ficar aonde?

Tomás: aqui [Tomás indica que o vértice do triângulo onde se intersetam a base e a hipotenusa do triângulo, que tinha abcissa 0, agora vai ter abcissa 2] … ah!

As alunas Madalena e Margarida são o outro par que apresentou uma resolução às subalíneas b12) e b13) (figura 70) mas que não recorrem aos elementos geométricos necessários para representar os números $2+\sqrt{29}$ e $-4+\sqrt{29}$. As alunas assumem incorretamente que $\sqrt{29}$ corresponde a 5,5 e que depois basta somar 2 unidades e subtrair 4 unidades, respetivamente, para obter os pontos de abcissas $2+\sqrt{29}$ e $-4+\sqrt{29}$. As alunas parecem, assim, desconhecer que ao recorrerem a esse procedimento, estão a obter os pontos cujas abcissas são valores aproximados desses números.

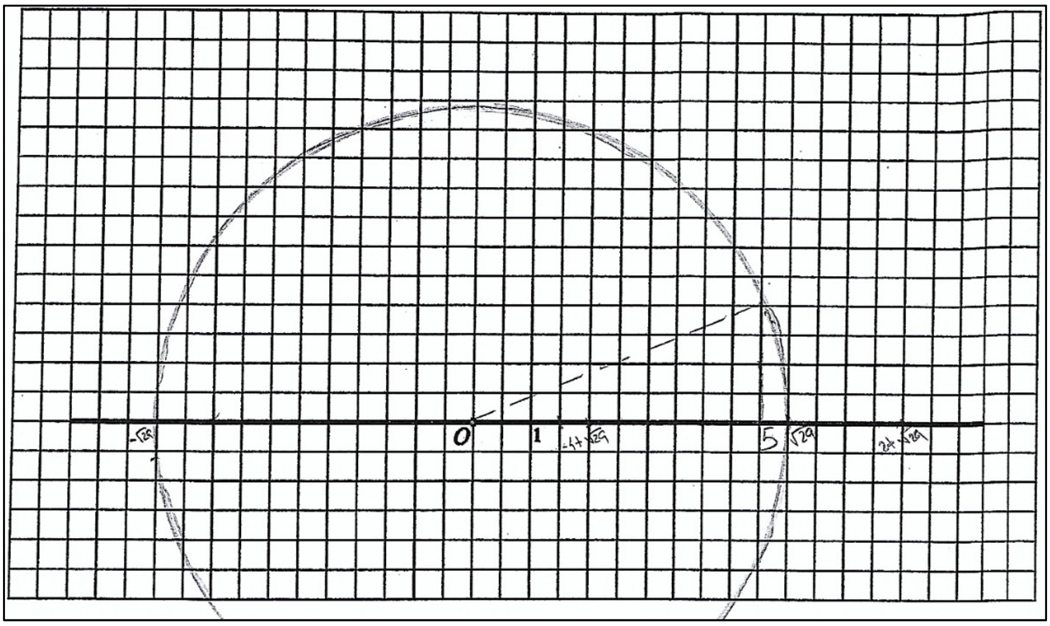


Figura 70 - Resolução de Madalena e Margarida (Tarefa 6, Alíneas b) e b1))

Na discussão das subalíneas b12) e b13), foi Tomás que se deslocou ao quadro e apresentou aos colegas a sua resolução para a subalínea b12). Na sua intervenção, para além de ter fornecido uma explicação acerca do procedimento de como representar um número irracional na reta real, que foi esclarecedora para os colegas, o aluno destacou o facto de que é através dele que se obtém a representação exata desse número. A intervenção de Tomás parece ter tido efeito, visto que na discussão da subalínea b13), Constança sugere como representar o número $-4+\sqrt{29}$ na reta real.

Tomás: temos este extremo aqui [origem da reta real]? E se nós passamos $2+\sqrt{29}$, temos que meter mais dois, por isso, fazemos, podemos meter o triângulo para cá mais 2. Porque aqui é $\sqrt{29}$, mais 2 vai ficar mais ou menos aqui, mas para ser mais ou menos exato, mais exato, temos que fazer o triângulo, o triângulo mais 2, por isso é que o 2 fica o zero e no 7 fica o 5, fica tipo mais ou menos aqui a base [o Tomás indica com os dedos o segmento entre os pontos de abcissas 2 e 5] e depois a altura, e só fazer o mesmo que este [Tomás indica com os dedos a altura e o arco da circunferência].

Teresa: mas depois tem que se traçar a circunferência na mesma?

Tomás: sim.

Professor: então onde é que vai ficar $-4+\sqrt{29}$?

[Ricardo, que se oferece para responder, desloca-se ao quadro e apresenta uma sugestão de resolução].

Ricardo: vai ficar aqui [Ricardo indica à esquerda de $-\sqrt{29}$].

Professor: Ricardo, a base vai ficar entre que números?

Ricardo: entre o menos 4 e o menos 9.

Constança: eu acho que vai começar no triângulo do meio [triângulo usado para representar $\sqrt{29}$] mas vai andar 4 para trás, porque não estamos a trabalhar com $-\sqrt{29}$, estamos a trabalhar com $\sqrt{29}$.

Na 2ª questão do 1º miniteste, pretendeu-se avaliar os conhecimentos dos alunos referentes à representação de números irracionais na reta real. Na análise das resoluções, verifiquei que 12 dos 14 pares de alunos recorreram ao Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa do triângulo retângulo representado na figura e concluíram corretamente que o valor da abcissa do ponto *A* era igual ao comprimento da hipotenusa, como foi o caso dos alunos André e Susana (figura 71).

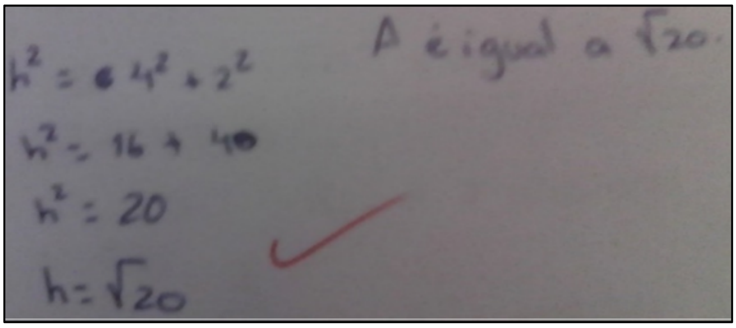


Figura 71 - Resolução de André e Susana (Miniteste 1, Questão 2, Alínea a))

A maioria dos alunos revela ter ultrapassado as suas dificuldades, ao reconhecerem que o Teorema de Pitágoras desempenha um papel na representação de raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos, e que quando se pretende representar $\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \notin \mathbb{N})$ na reta real, os alunos têm de construir um triângulo retângulo cuja hipotenusa tem comprimento $\sqrt{n}$.

Em relação à alínea b) do 1º miniteste, pretendia-se que os alunos fossem capazes de localizar o simétrico de um número irracional, feita a construção geométrica deste. Na análise das resoluções, verifiquei que 11 dos 14 pares de alunos responderam corretamente que o ponto *B* tinha abcissa $-\sqrt{20}$, tal como o fizeram Ricardo e Carla na figura 72. A maioria dos alunos mostrou saber como representar um número irracional na reta real, assim como o seu simétrico.

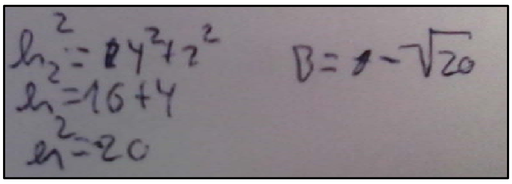


Figura 72 - Resolução de Ricardo e Carla (Miniteste 1, Questão 2, Alínea b))

Em relação à alínea c), apenas 3 pares de alunos apresentaram uma resposta correta, em que, tal como a aluna Constança (figura 73), limitaram-se a indicar a resposta. Apesar desta aluna ter apresentado uma resposta correta, tal como já tinha acontecido na tarefa 6, atendendo ao reduzido número de respostas corretas, considero que a maioria dos alunos não compreendeu como representar na reta real um número irracional escrito na forma $a + \sqrt{b}\ (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, \sqrt{b} \notin \mathbb{N})$.

Figura 73 - Resolução de Constança (Miniteste 1, Questão 2, Alínea c))

Dos 11 pares de alunos, apenas 1 não apresentou uma resposta, mas nas resoluções dos restantes 10 verifiquei uma variedade de respostas incorretas devido a dificuldades relacionadas com a interpretação da figura do enunciado. Uma resposta incorreta apresentada por dois pares de alunos foi a de Tomás e Vera (figura 74), o que foi surpreendente, visto que estes alunos foram os únicos da turma a representar corretamente números irracionais escritos na forma $a + \sqrt{b}\ (a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, \sqrt{b} \notin \mathbb{N})$ na resolução da tarefa 6. Neste caso, os alunos não se apercebem que a abcissa do ponto *C* é igual à do ponto *A* adicionada de 4 unidades, e assumem antes que é necessário reutilizar o Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos que medem 8 e 2 unidades, que estaria correto se estivesse representado um triângulo retângulo com estas dimensões. A meu ver, este erro teve origem em dificuldades de interpretação por parte de Tomás e Vera, pois não reconheceram que o triângulo representado na figura à direita resulta de uma translação do triângulo à esquerda através do vetor $\vec{u} = (4,0)$.

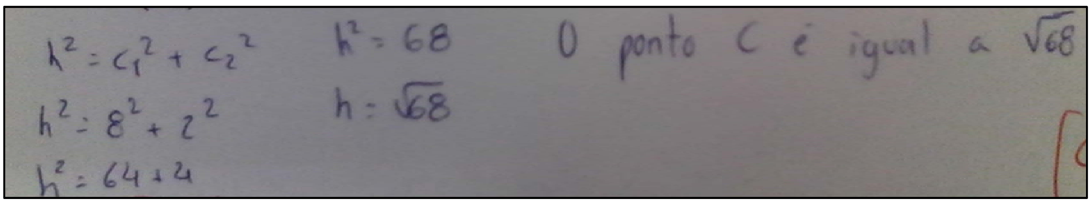


Figura 74 - Resolução de Tomás e Vera (Miniteste 1, Questão 2, Alínea c))

Uma outra resposta incorreta, apresentada por dois pares de alunos, foi a de Ricardo e Carla (figura 75), em que os alunos, ao verem um segundo triângulo geometricamente igual ao primeiro, assumem que a distância do ponto *C* à origem é igual ao dobro da distância do ponto *A* à origem. Esta resposta resulta de dificuldades de interpretação da figura por parte de Ricardo e Carla, visto que estaria correta se o vértice do segundo triângulo onde se intersetam a base e a hipotenusa coincidisse com o ponto *A*.

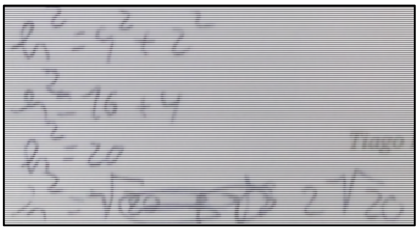


Figura 75 - Resolução de Ricardo e Carla (Miniteste 1, Questão 2, Alínea c))

A resposta incorreta mais frequentemente observada, apresentada por 4 pares de alunos, foi a de Carolina (figura 76). A aluna atribui ao ponto *C* a mesma abcissa que o ponto *A* e, apesar de calcular de forma correta o comprimento da hipotenusa do segundo triângulo, Carolina evidencia dificuldades na interpretação da figura, pois não se apercebe que o valor obtido corresponde à distância do ponto de abcissa 4 até ao ponto *C*. A resposta da aluna sugere dificuldades na noção de abcissa de um ponto representado na retal real, pois além de evidenciar que não sabe que a abcissa de qualquer ponto representado na reta real corresponde ao comprimento do segmento cujos extremos são a origem da reta real e esse ponto, também sugere que desconhece que dois pontos distintos representados na reta real não podem ter a mesma abcissa.

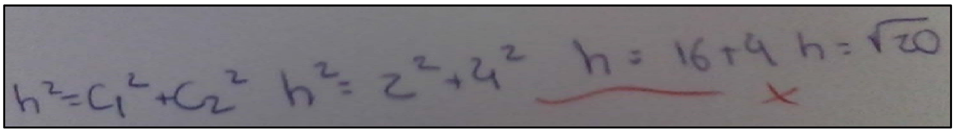


Figura 76 - Resolução de Carolina (Miniteste 1, Questão 2, Alínea c))

Resumindo, os alunos mostraram evidências de compreender que a representação de números irracionais na reta real, especificamente raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos, envolve a aplicação de conhecimentos geométricos. A maioria dos alunos recorre à aplicação do Teorema de Pitágoras para construir um triângulo retângulo em que o comprimento da sua hipotenusa seja igual a $\sqrt{n}$ e depois ao traçar de uma circunferência para marcar na reta real o ponto de abcissa $\sqrt{n}$ $\left(n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \notin \mathbb{N}\right)$. Para representar o simétrico de $\sqrt{n}$, a maior parte dos alunos traça uma circunferência com um raio de $\sqrt{n}$ unidades, até intersetar a reta real à esquerda da sua origem. Um dos alunos recorreu a um método alternativo: ao obter a representação de $\sqrt{29}$ na reta real, construiu um triângulo retângulo simétrico àquele que utilizou para representar $\sqrt{29}$, em relação à reta $x = 0$. Pareceu-me que este método permitiu ao aluno compreender o papel do triângulo retângulo na representação de números irracionais na reta real, que permitiu que ele representasse eventualmente $-\sqrt{n}\ (n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \notin \mathbb{N})$ na reta real corretamente.

Apesar das evidências de que a maioria dos alunos compreendeu o processo de construção geométrica para a representação de números irracionais na reta real, também revelaram algumas dificuldades nesse processo. Na aplicação do Teorema de Pitágoras, os alunos evidenciaram dificuldades em determinar os comprimentos dos catetos para representar os números $\sqrt{13}$ e $\sqrt{29}$ na reta real, ou seja, dois números a e b $(a, b \in \mathbb{N})$ tais que $a^2 + b^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$ e dois números c e d $(c, d \in \mathbb{N})$ tais que $c^2 + d^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2$. Os alunos também mostraram dificuldades numéricas, de representação e também de interpretação. Em relação às dificuldades numéricas, alguns alunos calcularam de forma incorreta a hipotenusa pois não calcularam de forma correta os quadrados dos catetos. Alguns alunos evidenciaram dificuldades de representação, pois quando lhes foi pedido o valor exato de raios de circunferências, os alunos apresentaram os valores aproximados. Na representação dos números $\sqrt{13}$ e $\sqrt{29}$ na reta real, alguns alunos apresentaram respostas incorretas por interpretarem incorretamente a escala das figuras onde deveriam efetuar a representação. As dificuldades numéricas e as de interpretação anteriormente mencionadas não permitiram a alguns alunos representarem corretamente $\sqrt{13}$ e $\sqrt{29}$ na reta real, mas não mostraram prejudicar a compreensão dos alunos na necessidade de aplicar o Teorema de Pitágoras na representação de números irracionais na reta real, ou de como efetuar o processo de construção geométrica. Também não impediram os alunos se compreenderem o motivo pelo qual se traça uma circunferência centrada na origem da reta real e que passa no ponto de interseção da altura do triângulo com a sua hipotenusa, cujo raio será assim igual ao comprimento da hipotenusa e também à distância da origem da reta real ao ponto de interseção com a reta real, localizado à direita da origem.

5.3. Operações com números irracionais

Nesta secção, pretendo identificar como os alunos operam com números irracionais. Para o efeito irei basear-me na tarefa 7 (questões 1, 2, 3, 4 e 5), na tarefa

8 (alíneas a) e c)) e no 2º miniteste (questão 3) que os alunos realizaram no final da intervenção letiva.

Com a tarefa 7, *Operações com números irracionais*, pretendia-se que os alunos fossem capazes de operar com números irracionais, especificamente operar com raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos. Além da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão, esperava-se que os alunos fossem capazes de calcular o quadrado de números irracionais, assim como estabelecer regras gerais acerca destas operações com números irracionais.

Na análise das resoluções da questão 1, observei que 9 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa 7, apresentaram uma semelhante à de Carlos, que apresento na figura 77. Os alunos basearam-se no padrão que identificaram nos exemplos apresentados no enunciado da questão, e conjeturaram que quando se pretende adicionar ou subtrair os números $a\sqrt{c}$ e $b\sqrt{c}\ (a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N})$, somam-se ou subtraem-se os coeficientes a e b e mantém-se o radical $\sqrt{c}$ no resultado.

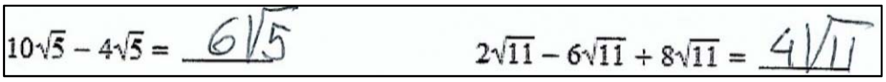

$10\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ $\quad$ $2\sqrt{11} - 6\sqrt{11} + 8\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$

Figura 77 - Resolução de Carlos (Tarefa 7, Questão 1)

Outros 5 pares de alunos apresentaram uma resposta semelhante à da figura 78, em que apresentam um resultado correto para operação $10\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$ e um incorreto para a operação $2\sqrt{11} - 6\sqrt{11} + 8\sqrt{11}$. No entanto, observa-se que isto se deve a uma dificuldade numérica, pelo facto de os alunos não terem subtraído corretamente dois números inteiros corretamente e não a dificuldades com a operação, pois foram capazes de definir corretamente as operações de adicionar e subtrair números irracionais.


$10\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ $\quad$ $2\sqrt{11} - 6\sqrt{11} + 8\sqrt{11} = 12\sqrt{11}$

Figura 78 - Resolução de Carolina (Tarefa 7, Questão 1)

Com a questão 2 pretendeu-se que os alunos reconhecessem que não se podem somar nem subtrair raízes quadradas com radicandos diferentes, justificando se a igualdade $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}\ (a, b \geq 0)$ é verdadeira. Pela análise das resoluções dos 14 pares de alunos, verifiquei que 4 pares de alunos não apresentaram uma resposta e 9 responderam corretamente que a igualdade é falsa. Numa análise às respostas destes 9 pares de alunos, verifiquei que todos recorreram a um contraexemplo para justificar a falsidade da proposição apresentada, apresentando uma resolução semelhante à de Henrique e Daniela (figura 79).

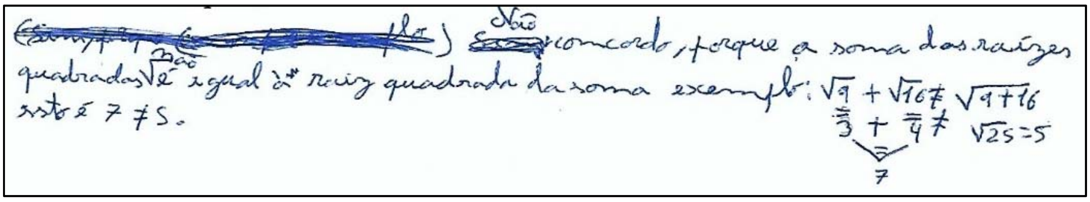


Figura 79 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 7, Questão 2)

Um dos pares de alunos que mostraram dificuldades foi André e Susana, cujo diálogo que tive com eles se apresenta abaixo, evidenciando as dificuldades de André em calcular $\sqrt{1}$ e $\sqrt{0}$, que o tinha conduzido a concluir erradamente que $\sqrt{1} + \sqrt{0}$ não é igual a $\sqrt{1+0}$. As respostas de André sugerem que o aluno não tinha bem presente a noção de raiz quadrada de um número, visto que ele apenas soube indicar os valores corretos de $\sqrt{1}$ e $\sqrt{0}$ no momento em que eu recorri à potenciação para lhe perguntar o valor de $\sqrt{1}$. Estas dificuldades podem também estar relacionadas com o facto de que os números 1 e 0 serem os únicos números inteiros não negativos cujas raízes quadradas, assim como de qualquer outro índice, são iguais a eles próprios. Esta particularidade pode confundir os alunos, pois no cálculo da raiz quadrada de qualquer outro número inteiro positivo, os alunos obtêm sempre um valor diferente do radicando e são suscetíveis de criarem uma regra que generalize isso, em que as raízes quadradas de 1 e 0 não a respeitam.

Professor: então, concordas com isto $\left[\sqrt{1} + \sqrt{0} = \sqrt{1+0}\right]$?

André: não, que isto $\left[\sqrt{1} + \sqrt{0}\right]$ não é isto $\left[\sqrt{1+0}\right]$…

Professor: então diz-me lá uma coisa, quanto é que é $\sqrt{1}$?

André: $\sqrt{1}$? Então, é…

Professor: ah… 1. $\sqrt{0}$?

André: dá para fazer $\sqrt{0}$? Está, está errado…

Professor: então não há um número que ao quadrado dá zero?

André: não… zero.

Professor: então, $\sqrt{0}$?

André: zero.

Professor: ok, 1 + 0?

André: 1.

Professor: então o que deu aqui $[\sqrt{1}+\sqrt{0}]$, é igual aqui $[\sqrt{1+0}]$?

André: é.

Professor: então isto $[\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}]$ é verdade?

André: é.

Professor: ok, então agora, isto $[\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}]$ é verdade para quaisquer números?

André: não…

Professor: quaisquer números, Ahmed que aqui $[\sqrt{a}+\sqrt{b}]$ não dê aqui $[\sqrt{a+b}]$…

A resolução de André e Susana (figura 80) sugere que os alunos se sentiram apoiados nas suas dificuldades, pois reconhecem na sua resolução de forma correta que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ não é uma igualdade verdadeira. No entanto, o uso de valores aproximados pode não ser suficiente para concluir que não se podem somar raízes quadradas com radicandos diferentes, ao contrário do uso de valores exatos.

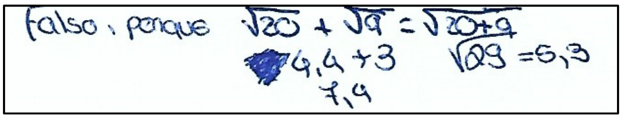


Figura 80 - Resolução de André e Susana (Tarefa 7, Questão 2)

No final da discussão da questão 2, as intervenções de alguns alunos sugeriram que tinham reconhecido que somar raízes quadradas com radicandos diferentes e somar raízes quadradas com radicandos iguais produzem resultados diferentes. Apresento abaixo o excerto da discussão da questão 2, após os alunos concordarem com uma das resoluções apresentadas no quadro, semelhante à da figura 80.

Professor: então que conclusão tiramos? Daniela, o que é que concluímos?

Daniela: que a soma das raízes não é igual à raiz quadrada da segunda.

Professor: são diferentes. Então a afirmação $[\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}]$ é verdadeira ou falsa?

Alguns alunos: falsa.

Professor: oiçam lá, vamos lá esclarecer aqui uma coisa aqui na adição, para ver se têm alguma dúvida. Quem é que quer explicar por que é nós pudemos fazer $10\sqrt{5}-4\sqrt{5}$?

Outra aluna: ah… podemos subtrair ao $-4\sqrt{5}$, o $10\sqrt{5}$… e dá $6\sqrt{5}$.

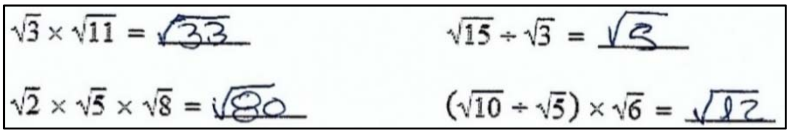
Professor: sim, mas porque é que nós podemos fazer isso? O que é que vocês notam aqui $[10\sqrt{5}-4\sqrt{5}=6\sqrt{5}]$. Porque é que eu pude fazer esta operação? Porque é que aqui $[2\sqrt{11}-6\sqrt{11}+8\sqrt{11}=4\sqrt{11}]$, eu pude fazer esta operação? Notam algum padrão?

Marta: as raízes são iguais.

Professor: Ali $\left[10\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\right]$ todos nós concordámos que tem raízes iguais, portanto podemos somar e subtrair, agora porque é que $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ não é $\sqrt{13}$?

Teresa: ah, porque nós ali, a raiz quadrada não é igual.

Na questão 3 da tarefa 7 pretendeu-se averiguar se os alunos saberiam multiplicar e dividir raízes quadradas de números naturais que não fossem quadrados perfeitos. À semelhança da resolução da figura 81, todos os alunos apresentaram resultados corretos para todas as multiplicações e todas as divisões solicitadas na tarefa. Os alunos seguiram o mesmo método de resolução que na questão 1, identificando o padrão nos exemplos apresentados, e concluíram que para multiplicar ou dividir as raízes quadradas de dois números inteiros, mantém-se a raiz quadrada no resultado e o seu radicando será igual ao produto ou ao quociente dos radicandos.


$\sqrt{3} \times \sqrt{11} = \sqrt{33}$ $\quad$ $\sqrt{15} \div \sqrt{3} = \sqrt{5}$

$\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{8} = \sqrt{80}$ $\quad$ $(\sqrt{10} \div \sqrt{5}) \times \sqrt{6} = \sqrt{12}$

Figura 81 - Resolução de Catarina (Tarefa 7, Questão 3)

Com a questão 4 da tarefa 7 pretendeu-se que os alunos reconhecessem que multiplicar um número racional por um número irracional é diferente do que dois irracionais, isto é, que o resultado do produto $a \times \sqrt{b}$ é diferente de $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Na análise das respostas verifiquei que 13 dos 14 pares de alunos responderam corretamente que a igualdade era falsa, havendo diferentes tipos de justificações. A maioria dos alunos apresenta uma resposta semelhante à de Carlos (figura 82), que defende corretamente que $\sqrt{30}$ é o resultado da multiplicação de $\sqrt{5}$ por $\sqrt{6}$, e não de 5 por $\sqrt{6}$. Parece-me que estes alunos recordaram a regra de multiplicação entre duas raízes quadradas, aquando da resolução da questão 3, e ao estarem confrontados com uma multiplicação na questão 4, concluem que $a \times \sqrt{b}$ não possui o mesmo resultado que $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$. A apresentação de uma resposta semelhante à de Carlos, no entanto, não garante que os alunos tenham identificado que $a \times \sqrt{b} \neq \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ mas que os alunos sabem que o resultado da multiplicação de duas raízes quadradas é igual à raiz quadrada do produto dos respetivos radicandos.

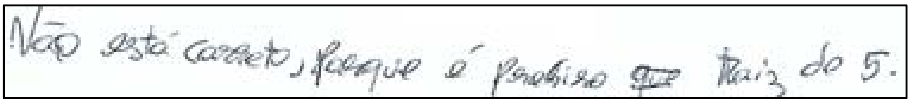


Figura 82 - Resolução de Carlos (Tarefa 7, Questão 4)

Outros alunos apresentaram uma resposta semelhante à de Constança (figura 83), que obtém as aproximações de $\sqrt{6}$ e de $\sqrt{30}$ através da calculadora e, ao comparar os valores, conclui que a igualdade é falsa.

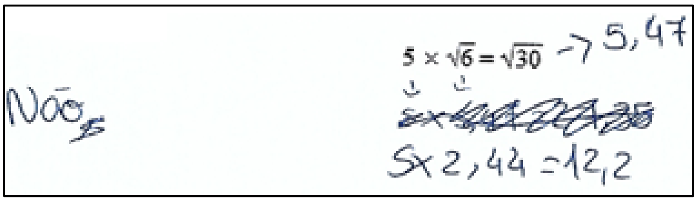


Figura 83 - Resolução de Constança (Tarefa 7, Questão 4)

Para consolidar as aprendizagens dos alunos sobre o resultado da multiplicação de duas raízes quadradas de números naturais, que é diferente do da multiplicação de um número natural pela raiz quadrada de um número natural, recorri a um exemplo representativo para ambas as situações, como se apresenta no excerto abaixo da discussão coletiva, depois Carlos ter ido ao quadro apresentar a sua resolução (figura 82). Como se pode observar, a discussão da questão 4 termina com alguns alunos a reconhecerem que $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$.

Professor: $\sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}$, agora, quanto é que será $5 \times \sqrt{6}$? Qual é o valor exato daquele produto?

Tomás: é $5\sqrt{6}$.

[Eu escrevo no quadro].

Carolina: stôr, então quer dizer que $5\sqrt{6}$ é tipo, o vezes…

Professor: exato, reparem bem, têm $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$. No $2\sqrt{3}$, o que é que o 2 está a fazer com $\sqrt{3}$? Que operação está aí?

Alguns alunos: multiplicar.

Professor: multiplicar, portanto $5 \times \sqrt{6}$ é $5\sqrt{6}$. Portanto, tenham muito cuidado quando está ali raízes e quando não está uma raiz, está bem? Portanto, quanto é que é $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$ [Eu escrevo no quadro]?

Um aluno: $\sqrt{18}$ [Eu escrevo no quadro]. Toda a gente concorda?

Alguns alunos: sim.

Professor: então, quanto é que é $3 \times \sqrt{6}$ [Eu escrevo no quadro]?

Outro aluno: é $3\sqrt{6}$ [Eu escrevo no quadro].

Professor: está percebido? Portanto, quando os dois têm raiz, vocês fazem o 3 vezes o 6, raiz, certo? Quando está aqui o número sem raiz, é só…

Guilherme: ah…!

Com a questão 5 da tarefa 7 pretendeu-se que os alunos fossem capazes de calcular o quadrado de números irracionais e que reconhecessem que o quadrado da raiz quadrada de qualquer número é igual ao seu radicando. Na análise das resoluções observei que 2 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa 7 não apresentaram uma resposta e os restantes utilizaram várias estratégias para calcular o resultado das potências. Para o cálculo de $\left(\sqrt{6}\right)^2$, observei que quase todos os alunos começaram por desdobrar a potência, efetuando o produto das raízes quadradas mobilizando o conhecimento recente, tal como mostra a resolução de Carolina (figura 84).

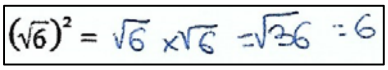


Figura 84 - Resolução de Carolina (Tarefa 7, Questão 5)

No entanto, nem todos concluíram que $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$. Alguns alunos, como Constança (figura 85), não simplificaram o resultado pois não calcularam a raiz quadrada de $\sqrt{36}$. Este facto pode dever-se à falta de hábito dos alunos simplificarem resultados ou não se aperceberem que 36 é um quadrado perfeito, mas também por imitação dos exemplos de multiplicações de raízes quadradas que observaram na questão 3, em que o resultado era uma raiz quadrada (mas não quadrados perfeitos).

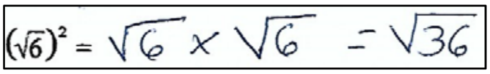


Figura 85 - Resolução de Constança (Tarefa 7, Questão 5)

Nos cálculos das restantes duas potências, escritas na forma $\left(a\sqrt{b}\right)^2$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N})$, observei que todos os alunos que desdobraram a primeira potência, também o fizeram para as outras, mas ao efetuarem a multiplicação, os alunos cometeram diversos erros. A aluna Teresa foi uma das que obteve um resultado correto para $\left(2\sqrt{3}\right)^2$, que após desdobrar a potência, aplica a propriedade comutativa da multiplicação e efetua o respetivo produto, como se observa na figura 86.

$$(2\sqrt{3})^2 = (2\times 2)\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3}) = 4\times 3 = 12$$

Figura 86 - Resolução de Teresa (Tarefa 7, Questão 5)

No caso dos alunos Tomás e Vera, ao efetuarem o desdobramento de $\left(2\sqrt{3}\right)^2$, Tomás não é capaz de definir como proceder no cálculo do produto que obtém, como é percetível no diálogo, apresentado abaixo, que tive com ele durante o trabalho autónomo.

Tomás: oh stôr, então e agora?

Professor: então, o que é que…

Tomás: não sei, aqui não diz, só está a dizer que são estes dois $[2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}]$, se eu meter 2, 2, raiz quadrada de 9…

Professor: diz-me uma coisa, o que é que está a acontecer entre aquele 2 e aquela $\sqrt{3}$?

Tomás: multiplicar?

Professor: então, outra maneira de tu escreveres isto $[2\sqrt{3}]$?

Tomás: 2 vezes 3.

Professor: 2 vezes…?

Tomás: $\sqrt{3}$.

Professor: então escreve lá o que tu disseste. E agora… e agora uma coisa, estes números $[2\times\sqrt{3}\times 2\times\sqrt{3}]$ têm que estar por esta ordem?

Tomás: posso meter este [2] vezes este [2] e este $[\sqrt{3}]$ vezes este $[\sqrt{3}]$… ah!

Como se observa pela resolução de Tomás e Vera (figura 87), depois deste diálogo os alunos aplicaram corretamente a propriedade comutativa da multiplicação e calculam os produtos de forma correta, mas tal como tinha ocorrido na primeira potência, não calculam a raiz quadrada obtida após o produto.

$$(2\sqrt{3})^2 = 2\times\sqrt{3}\times 2\times\sqrt{3} = 2\times 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 4\times\sqrt{9} = 4\sqrt{9}$$

Figura 87 - Resolução de Tomás e Vera (Tarefa 7, Questão 5)

Ao contrário das resoluções anteriormente, Ricardo e Carla (figura 88) não aplicam a propriedade comutativa da multiplicação após efetuarem o desdobramento da potência nas usam a propriedade associativa no cálculo do produto. A meu ver, pode haver diferentes razões por os alunos terem procedido dessa maneira: os alunos reconheceram, na questão 4, que $a\times\sqrt{b}$ não é igual a $\sqrt{ab}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ e que $2\sqrt{3}$ não necessitaria de mais nenhum tratamento. E os alunos podem assim ter notado que se poderia calcular depois a potência, tal como tinham feito com $\left(\sqrt{6}\right)^2$.

$$(2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{9} = 12$$

Figura 88 - Resolução de Ricardo e Carla (Tarefa 7, Questão 5)

Na resolução da questão 5, os alunos Diogo e Marta (figura 89) cometeram alguns erros, embora a tenham iniciado com a mesma estratégia dos colegas. Os alunos desdobram $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ de forma correta, mas ao efetuarem o produto, apenas aplicam a potência ao 2, enquanto que para $\sqrt{3}$ não o fazem. Tendo em conta que os alunos souberam multiplicar corretamente as raízes quadradas apresentadas na questão 3, é surpreendente que sugiram nesta questão 5 que $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Também no cálculo de $\left(\sqrt{6}\right)^2$, após terem desdobrado a potência corretamente, os alunos afirmaram incorretamente, por erro de cálculo, que $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = \sqrt{32}$. Deste modo, é possível que os alunos tenham calculado $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$ incorretamente devido à representação do número e assim concluem incorretamente que $a\sqrt{b} \times a\sqrt{b} = (a \times a)\sqrt{b}$

$$(2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Figura 89 - Resolução de Diogo e Marta (Tarefa 7, Questão 5)

Na resolução de André e Susana (figura 90), os alunos efetuam o produto de forma incorreta, o que é surpreendente, visto que os alunos reconheceram na questão 4 que o procedimento que efetuaram nesta questão não era possível, revelando dificuldades em estabelecerem conexões entre ambas as questões.

$$(-3\sqrt{6})^2 = -3 \times \sqrt{6} \times (-3) \times \sqrt{6}$$
$$-\sqrt{18} \times (-\sqrt{18}) = \sqrt{324} = 18$$

Figura 90 - Resolução de André e Susana (Tarefa 7, Questão 5)

Não poderia deixar de mencionar uma estratégia adotada por dois pares de alunos na resolução da questão 5. Por exemplo, Madalena e Margarida (figura 91) apresentaram respostas corretas no cálculo das potências recorrendo à calculadora, como depois afirmam no diálogo que tive com elas durante o trabalho autónomo, apresentado a seguir, e que, a meu ver, pode impedir as alunas de definirem e compreenderem a operação de potenciação de números irracionais.

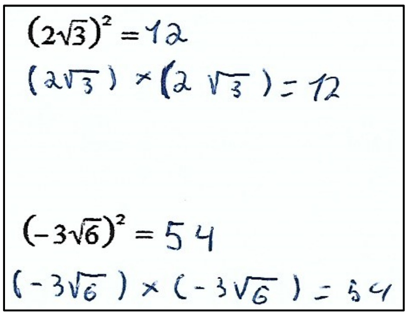


Figura 91 - Resolução de Madalena e Margarida (Tarefa 7, Questão 5)

Professor: o que é que se passa?

Madalena: neste aqui $\left[\left(\sqrt{6}\right)^2\right]$, eu acho que é assim $\left[\sqrt{6} \times \sqrt{6}\right]$, mas a calculadora…

Professor: a calculadora?! Aqui $\left[\left(2\sqrt{3}\right)^2\right]$, escrever na forma de produto…

Na tarefa 8, *Números irracionais: operações e comparações*, pretendeu-se que os alunos interpretassem um problema e o resolvessem, mobilizando os seus conhecimentos para efetuar operações com números irracionais, especificamente a adição, a subtração e a multiplicação.

Numa análise às resoluções dos alunos, verifiquei que a grande maioria aplicou de forma correta as regras operatórias com números irracionais, apesar de metade da turma ter manifestado dificuldades de interpretação de problemas em várias alíneas da tarefa. Na alínea a) da tarefa 8, era pedido aos alunos o cálculo do perímetro de um retângulo em que conheciam a largura $\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ e que o comprimento era igual ao dobro da largura. Para calcular o comprimento, alguns alunos somaram a largura duas vezes, como na resolução de Alexandre (figura 92), efetuando a adição de forma correta.

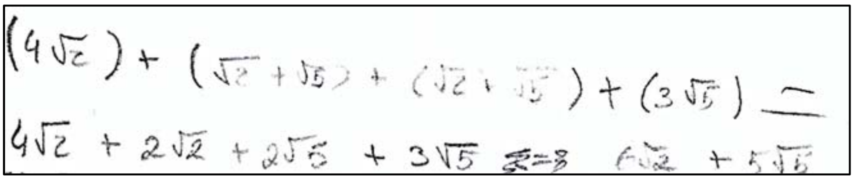


Figura 92 - Resolução de Alexandre (Tarefa 8, Alínea a))

Alternativamente, os alunos Tomás e Vera (figura 93) determinam corretamente o comprimento do retângulo multiplicando a largura por 2, um procedimento adotado por outros alunos. Este desempenho de Tomás e Vera veio mostrar que o diálogo que tive com eles durante o trabalho autónomo na tarefa 7 foi útil para compreenderem que $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$.

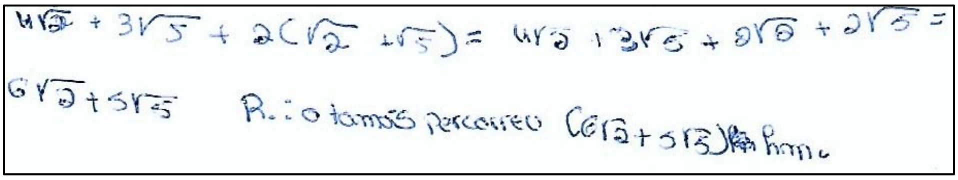


Figura 93 - Resolução de Tomás e Vera (Tarefa 8, Alínea a))

Apesar de todos os alunos terem deduzido de forma correta como calcular o comprimento do retângulo, alguns tiveram dificuldades em obter o valor correto. Carolina (figura 94), por exemplo, calcula o comprimento usando a estratégia de Tomás e Vera (figura 93), mas quando multiplica 2 por $(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, efetua-o incorretamente, obtendo $\sqrt{4} + \sqrt{10}$. Esta resolução de Carolina deixou-me surpreendido, pois de acordo com a sua resolução da tarefa 7, a aluna tinha reconhecido que $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$.

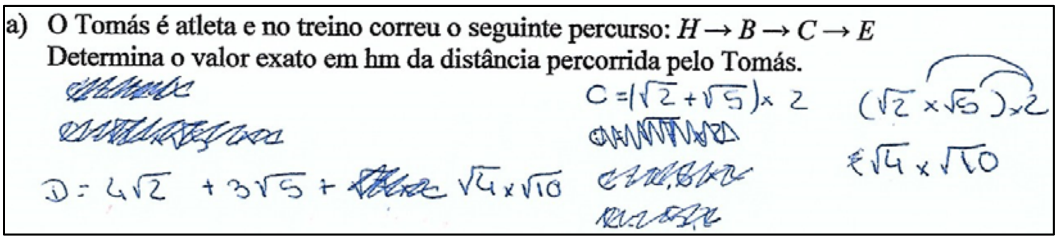


Figura 94 - Resolução de Carolina (Tarefa 8, Alínea a))

Tal como Carolina, os alunos Henrique e Daniela (figura 95) multiplicaram de forma incorreta $(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ por 2 e também tinha reconhecido na tarefa 7 que $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$, mas além disso, somaram incorretamente as raízes quadradas, contrariando o reconhecimento que fizeram na tarefa 7, pois os alunos tinham efetuado todas as adições corretamente. A meu ver, estas dificuldades sugerem que Henrique e Teresa ainda não se apropriaram de forma correta de algumas regras operatórias que envolvem as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos.

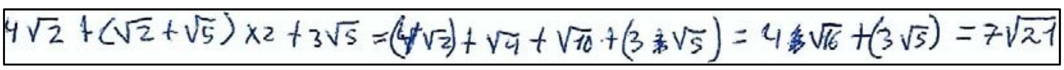


Figura 95 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 8, Alínea a))

Na sua resolução da alínea c) da tarefa 8, Diogo e Marta (figura 96) evidenciam também ainda não se terem apropriado da regra operatória da adição com números irracionais, pois afirmam que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Ao mesmo tempo, os alunos evidenciam várias outras dificuldades numéricas que sugerem: desconhecer a noção de dobro de um número, visto que em vez de multiplicarem a largura por 2, elevam o seu valor ao quadrado; desconhecer a necessidade de parênteses no desdobramento do quadrado da adição; e desconhecer a prioridade das regras operatórias pois quando obtêm a expressão $\sqrt{2} + \sqrt{5} \times \sqrt{2} + \sqrt{5}$, em vez de multiplicarem $\sqrt{5}$ por $\sqrt{2}$ primeiro, começam por adicionar $\sqrt{2}$ com $\sqrt{5}$ tanto no multiplicando como no multiplicador.

$$4\sqrt{2} + (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 + 3\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{5} \times \sqrt{2} + \sqrt{5} + 3\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{2} + \sqrt{7} \times \sqrt{7} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{49} + 3\sqrt{5} = 7\sqrt{56}\ \text{hm}$$

Figura 96 - Resolução de Diogo e Marta (Tarefa 8, Alínea a))

Na alínea c), era pedido aos alunos que calculassem a área de um retângulo. Apenas 6 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa 8 apresentaram uma resposta, enquanto 1 par apresentou uma resposta incompleta. Quanto aos alunos que não apresentaram uma resposta à alínea c), pode ter sido por falta de tempo, pois também nenhum apresentou uma resposta completa à alínea b). Dos pares que apresentaram uma resposta, verifiquei que 4 resolveram a questão de forma semelhante à da figura 97, em que os alunos aplicam corretamente a propriedade da dupla distributividade, assim como as respetivas multiplicações, mas depois não calculam as raízes quadradas de 4 e de 25. Esta resposta surpreendeu-me em todos os pares de alunos, visto que dois deles não fizeram o cálculo da raiz quadrada de quadrados perfeitos na tarefa 7 e ainda não ultrapassaram essa dificuldade, enquanto que os restantes dois fizeram esse cálculo na tarefa 7, e agora não foram capazes de o fazer. Em ambos os casos, os alunos evidenciam dificuldades em identificar quadrados perfeitos, o que pode ser limitativo para o aluno, não apenas na resolução de problemas como o da tarefa 8, mas como em tarefas com objetivos diferentes, como a classificação da raiz quadrada de um número natural quanto à sua irracionalidade.

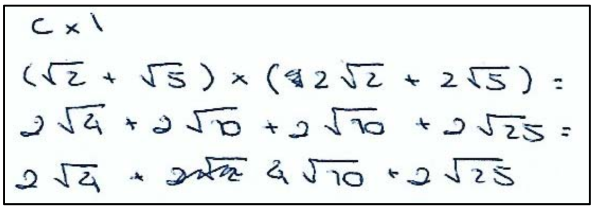


Figura 97 - Resolução de Teresa (Tarefa 8, Alínea c))

No final da intervenção letiva, os alunos realizaram o 2º miniteste que avaliaria os seus conhecimentos acerca dos números irracionais, sendo um dos conteúdos as regras operatórias com números irracionais, cuja avaliação seria feita com base na resolução da questão 3. Esta questão consistia num problema, em que se apresentava um quadrado dividido em dois quadrados distintos e em dois retângulos iguais. Na alínea a), pretendia-se que os alunos averiguassem se o perímetro da zona constituída pelos dois quadrados distintos era igual ao da zona constituída pelos dois retângulos iguais, e na alínea b), pretendia-se averiguar se o cálculo da área do quadrado constituído pelas quatro figuras geométricas referidas estava correto, em que todas as dimensões eram números irracionais. Numa análise às resoluções, verifiquei que, na alínea a), 11 dos 14 pares de alunos responderam corretamente que ambos os perímetros eram iguais, dos quais todos recorreram ao cálculo dos perímetros para justificarem a sua resposta. No entanto, apenas em duas resoluções observei uma resposta correta dos valores dos perímetros das duas zonas, sendo uma delas, a de Constança (figura 98). A aluna, no entanto, mostra saber que não pode somar raízes quadradas com radicandos diferentes, mas a sua resolução sugere que ainda não se apropriou da igualdade $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$, quando na resolução da tarefa 8 sugeria o contrário.

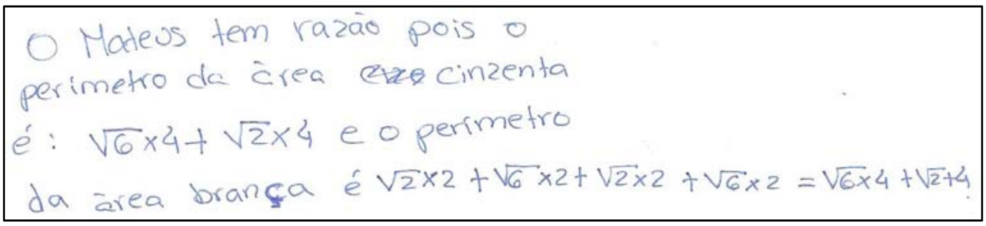
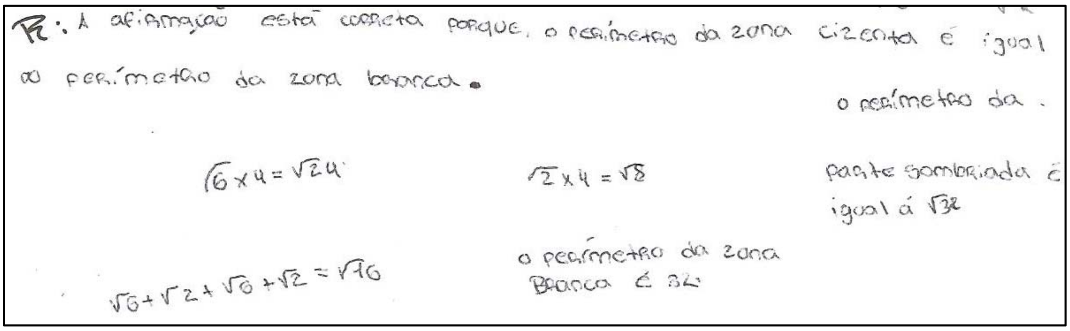


Figura 98 - Resolução de Constança (Miniteste 2, Questão 3, Alínea a))

Dos restantes alunos também observei dificuldades na aplicação das regras operatórias com números irracionais, principalmente na soma de raízes quadradas com radicandos diferentes e na multiplicação de um número inteiro por uma raiz quadrada. Diogo e Marta (figura 99) ainda não reconhecem que a igualdade $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$ é falsa, um erro cometido por outros 4 pares de alunos. Juntamente com outros 2 pares de alunos, Diogo e Marta também sugerem que $a \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $(a, b \in \mathbb{N})$, o que é surpreendente, pois, ambos não tinham cometido esse erro em nenhuma das tarefas anteriores em que foram abordadas as regras operatórias de números irracionais. Estes erros cometidos por um número significativo de alunos sugerem que eles ainda não se apropriaram das regras operatórias com raízes quadradas de números naturais.


R: A afirmação está correta porque, o perímetro da zona cizenta é igual ao perímetro da zona branca.

o perímetro da parte sombriada é igual á $\sqrt{32}$

$\sqrt{6} \times 4 = \sqrt{24}$

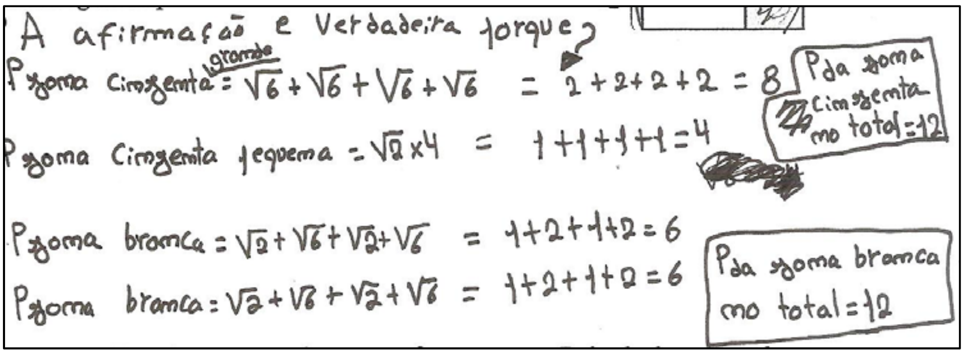
$\sqrt{2} \times 4 = \sqrt{8}$

$\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}=\sqrt{16}$

o perímetro da zona branca é 32

Figura 99 - Resolução de Diogo e Marta (Miniteste 2, Questão 3, Alínea a))

Uma resolução da alínea a) que me intrigou foi a de Guilherme (figura 100), também observada noutro par de alunos, que no cálculo dos perímetros das figuras geométricas atribui às raízes quadradas resultados incorretos, que além de evidenciar dificuldades numéricas, não pondera em efetuar as adições com os números na forma de raiz quadradas, tendo sido esse um dos tópicos a ser trabalhados na aula.


A afirmação é Verdadeira porque

P zona Cimzenta grande $= \sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6} = 2+2+2+2 = 8$

P zona Cimzenta pequema $= \sqrt{2} \times 4 = 1+1+1+1=4$

P da zona cimzenta mo total $=12$

P zona bramca $= \sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6} = 1+2+1+2=6$

P zona bramca $= \sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6} = 1+2+1+2=6$

P da zona bramca mo total $=12$

Figura 100 - Resolução de Guilherme (Miniteste 2, Questão 3, Alínea a))

Dos 3 pares de alunos que responderam incorretamente que os perímetros das zonas eram diferentes, 2 apresentaram apenas a resposta sem justificação, enquanto o restante par apresentou incorretamente o valor do perímetro da zona constituída pelos dois retângulos como o do perímetro de apenas de um dos retângulos e aplicou de forma incorreta a regra de adição de raízes quadradas com radicandos diferentes.

Na resolução da alínea b), 5 dos 14 pares de alunos que realizaram o miniteste, não apresentaram cálculos que sustentassem as suas respostas, levando a grande maioria a responder incorretamente à questão. Dos 9 pares de alunos que apresentaram cálculos, 8 responderam corretamente que o resultado da operação estava incorreto, com base num resultado diferente que os alunos calcularam, apesar de também estar incorreto. Na análise das resoluções, averiguei que nenhum dos alunos apresentou o resultado pretendido, manifestando dificuldades numéricas. As alunas Madalena e Margarida (figura 101) foram o par que estiveram mais próximas de obterem o resultado correto da expressão: calculam os produtos das raízes quadradas corretamente e também $\sqrt{36}$ e $\sqrt{4}$, sugerindo que se apropriaram de forma correta da multiplicação com números irracionais. No entanto, o mesmo não parece acontecer com a regra da adição quando os radicandos são iguais, tendo em conta que as alunas não calculam o resultado da adição $\sqrt{12} + \sqrt{12}$.

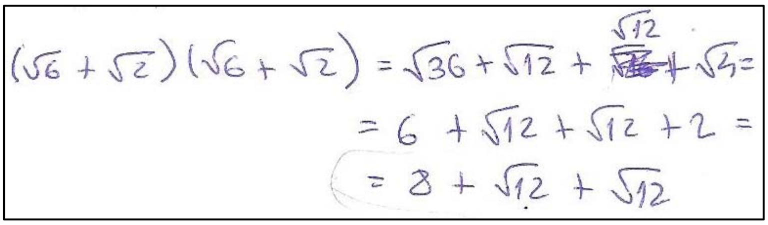


Figura 101 - Resolução de Madalena e Margarida (Miniteste 2, Questão 3, Alínea b))

Uma resolução que me surpreendeu foi a de Teresa (figura 102), pois a aluna já tinha evidenciado reconhecer que $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$ na resolução da alínea c) da tarefa 8 (figura 97), enquanto que nesta a aluna demonstra o contrário.

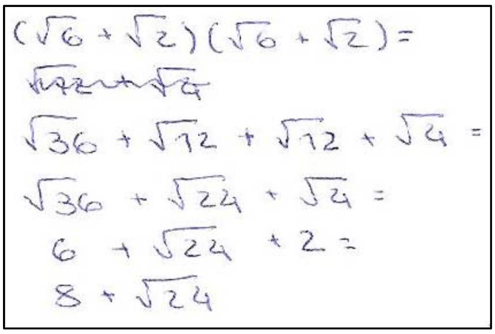


Figura 102 - Resolução de Teresa (Miniteste 2, Questão 3, Alínea b))

Na resolução da alínea b), houve alunos que não evidenciaram apenas dificuldades numéricas relacionadas com as regras operatórias com raízes quadradas de números naturais, mas também de conteúdos matemáticos lecionados antes da intervenção letiva e em anos de escolaridade anteriores, como o caso da propriedade da dupla distributividade. Dois desses alunos foram Tomás e Vera (figura 103), que somam em vez de multiplicarem os números uns pelos outros ao tentarem desembaraçarem-se dos parênteses. Uma das dificuldades mais evidenciadas, pelos alunos que apresentaram cálculos, foi na concretização da adição de raízes quadradas com radicandos diferentes, como Tomás e Vera, que assumem incorretamente que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$, sugerindo que ainda não se apropriaram de que esta igualdade é falsa.

Não concordamos, porque ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ tinha que ser $2\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{4}+2\sqrt{2}$ e não $6+2$.

Figura 103 - Resolução de Tomás e Vera (Miniteste 2, Questão 3, Alínea b))

Resumindo, nalgumas operações com números irracionais, os alunos recorrem a uma única estratégia, enquanto noutras recorrem a diferentes estratégias. Todos os alunos foram capazes de multiplicar e dividir raízes quadradas com radicandos iguais e diferentes, em que multiplicam ou dividem os radicandos e depois assumem que o resultado é igual à raiz quadrada do número obtido, baseando-se assim no padrão dos exemplos apresentados. Em relação à potenciação, especificamente ao quadrado de $\sqrt{a}$ $(a \in \mathbb{N})$, quase todos os alunos recorreram ao desdobramento do quadrado, transformando assim a potência numa multiplicação. Esses alunos souberam depois efetuar a multiplicação da forma $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, mas apenas alguns souberam reconhecer que estavam confrontados com a raiz quadrada de um quadrado perfeito e eventualmente calcularam-na. No cálculo da multiplicação da forma $a\sqrt{b} \times a\sqrt{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$, alguns alunos recorreram à propriedade comutativa da multiplicação, e após aplicarem-na, multiplicaram a e b por eles próprios, enquanto outros assumiram que se tinham de efetuar esses produtos sem aplicar a propriedade. Tanto num caso, como no outro, alguns alunos foram capazes de reconhecer que estavam diante de raízes quadradas de quadrados perfeitos e calcularam-nas de forma correta.

Em relação às dificuldades dos alunos, as maiores foram sentidas na adição e subtração de raízes quadradas e na multiplicação de um número inteiro pela raiz quadrada de um número natural. No final da discussão da primeira tarefa aquando da lecionação das operações com raízes quadradas, todos os alunos somaram e subtraíram raízes quadradas com radicandos iguais de forma correta, assumindo que quando se têm dois números da forma $a\sqrt{c} + b\sqrt{c}$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$, apenas se tem de adicionar ou subtrair a e b e manter $\sqrt{c}$, ou seja, $(a+b)\sqrt{c}$. Mas depois na aplicação dessas regras em problemas, a maioria dos alunos cometeu erros, assumindo que $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{2c}$. De forma semelhante, ao estarem confrontados com raízes quadradas com radicandos diferentes, os alunos assumem que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ $(a,b \in \mathbb{N})$. Apesar de a maioria dos alunos ter sabido multiplicar raízes quadradas de forma correta, os alunos aplicam a regra utilizada quando se multiplica a raiz quadrada por um número natural, ou seja, assumem que $a \times \sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a,b \in \mathbb{N})$, quando esta igualdade é, na verdade, falsa. Também manifestaram dificuldades em apropriarem-se das regras que as operações com raízes quadradas de números naturais envolvem, mas os alunos também estiveram confrontados com regras e resultados que nunca se depararam ao operarem com números racionais. No caso da adição de raízes quadradas de números naturais, a soma de duas com radicandos iguais dá origem a uma raiz quadrada, enquanto se forem diferentes, o resultado se escreve na forma de uma adição, não havendo uma representação alternativa que consista apenas num número. Analogamente, o resultado do produto de um número inteiro por uma raiz quadrada não se escreve na forma de uma raiz quadrada, mas continua na forma de um produto, mas sem o sinal de vezes.

5.4. Comparação de números irracionais

Nesta secção, pretendo analisar como os alunos comparam números irracionais sob diferentes representações: na forma de dízima e na forma de raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito. Para o efeito, pretendo basear-me nas resoluções das tarefas 9 e 10, assim como nas do 2º miniteste (questões 1 e 2) que os alunos realizaram posteriormente. Na aula em que foi proposta a tarefa 9, houve uma aluna que faltou, e, portanto, em vez das habituais 14 resoluções para análise, apenas se contarão com 13.

A tarefa 9, *Números irracionais e relações de ordem*, teve como objetivo principal a comparação de números irracionais na forma de dízima. Na análise das resoluções na questão 1, verifiquei que 12 dos 13 pares de alunos que realizaram a tarefa responderam corretamente na alínea a), afirmando que 2,5 é maior que 2,4(8), como sugere a resolução de Catarina apresentada na figura 104, não havendo evidências de como os alunos procederam para fazer esta conclusão.

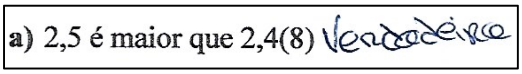

a) 2,5 é maior que 2,4(8) Verdadeiro

Figura 104 - Resolução de Catarina (Tarefa 9, Questão 1, Alínea a))

Na resolução da alínea b), todos os alunos responderam corretamente que 14,5 não é igual a 14,(50) e Constança (figura 105) recorre a uma representação alternativa de 14,(50) para fundamentar a sua resposta.

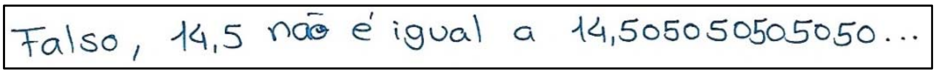

Falso, 14,5 não é igual a 14,505050505050...

Figura 105 - Resolução de Constança (Tarefa 9, Questão 1, Alínea b))

Verifica-se que Constança justificou a falsidade da afirmação, argumentando que 14,5 não é igual a 14,(50), sem estabelecendo uma relação de ordem entre os dois números. A resposta, no entanto, não deixa de estar incorreta, e a discussão da alínea permitiu não apenas estabelecer essa relação, mas também averiguar uma estratégia de como os alunos o fazem. O aluno Carlos mostra não compreender porque Carla afirma que 14,5 é maior que 14,(50), e Ricardo e Constança oferecem-se para o esclarecer. Ricardo acrescenta zeros no número 14,5 e repete o período de 14,(50) de modo que ambos tenham partes decimais com o mesmo número de algarismos e depois compara-as, enquanto Constança complementa que a comparação das partes decimais tem de ser feita entre os algarismos das respetivas ordens.

> **Professor:** portanto, a Carla diz que é falsa porque este [14,5] é maior que este [14,(50)]. Toda a gente concorda?
>
> **Carlos:** eu não sei…
>
> **Professor:** Ricardo, queres ajudar a colega?
>
> **Ricardo:** se…pusermos, se metermos o 14,(50), repetimos o 50 e no 14,5 repetirmos os zeros, o 14,50 vai ser maior porque tem mais 5.
>
> **Professor:** Ricardo, acho melhor ires lá explicar.
>
> Ricardo desloca-se ao quadro e escreve 14,5 = 14,500000… e 14,(50) = 14,505050…
>
> **Ricardo:** isto [505050…] é maior que isto [500000].
>
> Carlos continua a não compreender a resposta, portanto Constança vai ao quadro explicar, depois de Ricardo voltar para o lugar.
>
> **Constança:** tu aqui tens o 14, 14, certo? Depois aqui [14,500000] tens um 5, e aqui [14,505050…] também tens um 5, um zero e um zero, mas aqui [14,505050…] se tu reparares, tens um 5 e aqui [14,500000] tens um zero, qual é que é maior? É o 5, logo o número [14,505050…] passa a ser maior. Aqui [14,500000] tens zeros, mas aqui

[14,505050…] a partir do 5, aqui é um zero e aqui é um 5, este [14,505050…] passa a ser maior.

Carlos mostra-se satisfeito com o esclarecimento de Constança.

Para justificar a sua resolução na alínea c), Teresa (figura 106) recorreu a uma estratégia diferente na comparação das dízimas da alínea c), invocando a sua localização na reta real.

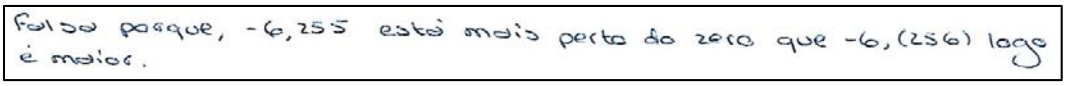

Falsa porque, -6,255 está mais perto do zero que -6,(256) logo é maior.

Figura 106 - Resolução de Teresa (Tarefa 9, Questão 1, Alínea c))

A aluna mostra ter conhecimento de como comparar números com base na sua proximidade da origem da reta real e no seu sinal pois na discussão coletiva desta tarefa, um dos colegas responde contrariamente, mas invoca a justificação dela, o que a leva a corrigi-lo, como evidenciando no excerto da discussão da questão 1, que se apresenta a seguir à figura.

Teresa: nós, nos números positivos, por exemplo, se tiveres o 1 e o 2, 1 é menor que o 2, mas nos negativos, é ao contrário.

Uma estratégia que alguns alunos adotaram na comparação de dízimas, em que uma era infinita periódica, foi escrever a dízima sem os parênteses e prolongá-la até que ambas as dízimas que se pretendia comparar tivessem, pelo menos, o mesmo número de casas decimais. Um desses alunos é Guilherme (figura 107) que, na alínea c), escreve corretamente $-6,(256)$ na forma de $-6,256256256...$, e ao comparar com $-6,255$, reconhece corretamente que esta é maior que a anterior, atendendo também ao sinal negativo de ambas as dízimas.

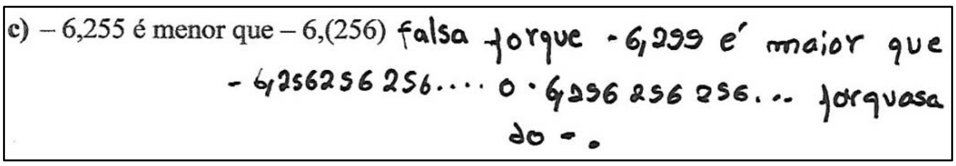

c) – 6,255 é menor que – 6,(256) falsa porque -6,255 é maior que -6,256256256.... o -6,256 256 256... porquasa do -.

Figura 107 - Resolução de Guilherme (Tarefa 9, Questão 1, Alínea c))

Na alínea b) da questão 1 do 2º miniteste pretendia-se que os alunos comparassem uma dízima infinita periódica com uma dízima infinita não periódica. Dos 14 pares de alunos que realizaram o miniteste, 8 apresentaram reconheceram que 8,3654… é maior do que 8,(365), como Alexandre (figura 108). Esta resposta correspondeu ao esperado tendo em conta os conhecimentos que o aluno já tinha evidenciado na resolução de tarefas anteriores (figura 111), como comparar números racionais e irracionais na forma de dízima.

Figura 108 - Resolução de Alexandre (Miniteste 2, Questão 1, Alínea b))

Contrariamente, os alunos Henrique e Daniela apresentaram uma resposta incorreta (figura 109), o que surpreendeu, visto que os alunos se mostraram capazes de comparar números racionais e irracionais na forma de dízima (figuras 117 e 118).

Figura 109 - Resolução de Henrique e Teresa (Miniteste 2, Questão 1, Alínea b))

Na alínea e) pretendia-se que os alunos comparassem duas dízimas infinitas não periódicas: o algarismo das unidades e os seis primeiros algarismos da parte decimal são iguais, enquanto os restantes algarismos da parte decimal estão representados por reticências. Esta questão pode ter gerado dificuldades por parte dos alunos, visto que apenas 3 dos 13 pares de alunos responderam corretamente que as dízimas não eram iguais. Constança (figura 110) é uma dessas alunas, e sugere que o algarismo 7 pode ser sucedido tanto pelo algarismo 8, como pelo 9, não sendo assim possível afirmar que as dízimas são iguais. Esta resolução também sugere que a aluna sabe que as reticências de uma dízima infinita não periódica não representam apenas uma infinidade de números, mas também que são desconhecidos.

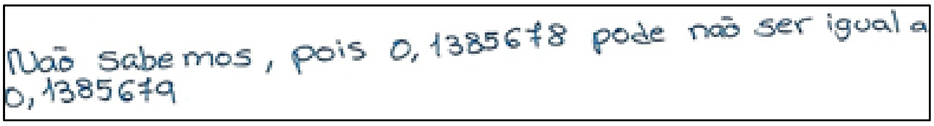


Figura 110 - Resolução de Constança (Tarefa 9, Questão 1, Alínea e))

A discussão da alínea e) evidenciou que alguns alunos compararam as duas dízimas apenas com base na parte decimal conhecida, sugerindo que os alunos desconhecem que a comparação de dízimas envolve toda a sua parte decimal, como mostra o excerto da discussão apresentado abaixo, e também o significado das reticências de uma dízima infinita não periódica. A maioria dos alunos reconhece que as reticências representam uma infinidade de números, mas alguns sugerem que não é possível fazer qualquer tipo de afirmação quanto à sua comparabilidade, visto que não se conhecem os restantes algarismos da parte decimal.

Um aluno: mas, eu estou a ver o que fiz pelo que está ali, se está ali, se ali se os números que ali estão, são iguais, é porque é verdade.

Professor: quando é que duas dízimas são iguais? Então, quando é que vocês dizem que isto [138567…] é igual a isto [138567…]?
Tomás: têm os mesmos números.

André: o problema é que está ali as reticências.

Constança: exato, stôr, pode vir um 8 ou pode vir um 9.

André: o problema é que está ali as reticências… não sabes o que vem a seguir.

Professor: atenção, estão ali as reticências, vocês podem afirmar que o que vem depois ali vai ser igual?

Tomás: sim.

Constança: não, não podemos nem afirmar que não é, nem que é.

Professor: pode parecer que os números podem ser iguais como podem não ser iguais, mas vocês não podem afirmar que eles são todos iguais depois dali, não podem dizer que estas duas dízimas são iguais.

Daniela: mas nós temos que ver os números que estão à vista… se nós não vemos, o stôr também não pode concluir nada sobre eles…

Professor: Daniela, o teu número é este [0,138567] ou é este [0,138567…]?

Daniela: as reticências é que não são números…

Na questão 3 pretendeu-se que os alunos indicassem dois números racionais e dois números irracionais entre os dois números apresentados em cada alínea. Para indicar dois números racionais, quase todos os alunos recorreram a uma dízima finita, como Alexandre (figura 111). Quanto à apresentação de dois números irracionais, o aluno indica dois números na forma de dízima infinita periódica. Numa análise das resoluções, verifiquei que a maioria dos alunos recorre à representação decimal de um número tanto para indicar um número racional, havendo assim uma preferência para este tipo de representação de um número racional. E é possível que esta preferência também tenha influenciado os alunos na apresentação de dois exemplos de um número irracional, visto que a maioria dos alunos recorreu a números na forma de dízima aquando da indicação de dois números irracionais na questão 3.

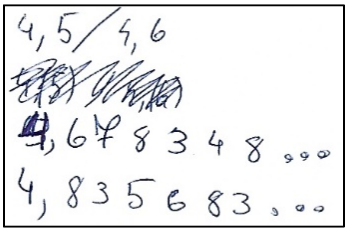


Figura 111 - Resolução de Alexandre (Tarefa 9, Questão 3, Alínea a))

A aluna Teresa (figuras 112 e 113) recorreu igualmente a uma dízima finita para indicar um número racional, mas também indicou um número inteiro. Tendo em conta a dízima finita apresentada e que $\sqrt{28} = 5{,}2915\ldots$, a aluna terá recorrido à calculadora para obter um valor aproximado de $\sqrt{28}$ a fim de procurar uma dízima finita que se situasse entre 4 e $\sqrt{28}$. Na apresentação de dois números irracionais, a aluna recorreu a dois números na forma de raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito. Na alínea a), um dos números era um número irracional escrito na forma de raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito, podendo ter influenciado a resposta de Teresa. Mas como na alínea b), em que ambos os números são naturais, a aluna volta a recorrer ao mesmo tipo de representação para indicar dois números irracionais (figura 113), penso que a aluna opta por preferência recorrer à raiz quadrada de um número do que à representação decimal aquando da indicação de números irracionais.

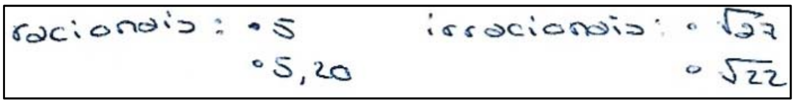


Figura 112 - Resolução de Teresa (Tarefa 9, Questão 3, Alínea a))

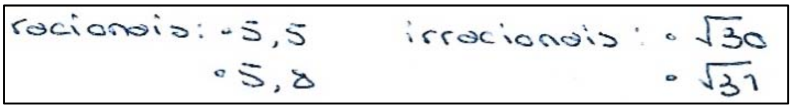


Figura 113 - Resolução de Teresa (Tarefa 9, Questão 3, Alínea b))

Na apresentação de dois números irracionais na alínea c), os alunos Tomás e Vera, cuja resolução se apresenta na figura 114, além de terem recorrido à raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito, indicaram π como resposta, estando ambos corretos. Nas primeiras duas alíneas, os alunos apresentaram corretamente duas raízes quadradas como exemplos de números irracionais, portanto parece-me que os alunos se apropriaram de que a raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito é um número irracional e sentiram-se mais confortáveis em recorrer a essa representação de um número irracional em vez de na decimal.

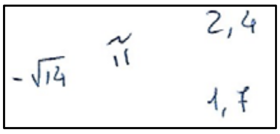


Figura 114 - Resolução de Tomás e Vera (Tarefa 9, Questão 3, Alínea c))

Nas primeiras duas alíneas, os alunos apresentaram corretamente duas raízes quadradas como exemplos de números irracionais, portanto parece-me que os alunos se apropriaram de que a raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito é um número irracional e sentiram-se mais confortáveis em recorrer a essa representação de um número irracional em vez de na decimal. O recurso ao número π também mostra que os alunos tinham conhecimento de que se tratava de um número irracional. Na discussão da questão 3.2. da tarefa 2, em que os alunos tinham de saber inserir alguns números num diagrama de Venn constituído pelos quatro conjuntos numéricos, foi Tomás que soube dizer a que conjunto pertence π, como evidencia a sua intervenção no excerto da discussão apresentado abaixo:

Professor: Tomás, onde é que então é o π?

Tomás: é no $\mathbb{R}$.

A resolução da alínea a) da questão 3 de Diogo e Marta (figura 115) intrigou-me, visto que os alunos apresentam duas dízimas finitas como exemplos de dois números irracionais que se situam entre 4 e $\sqrt{28}$, enquanto indicaram também uma dízima finita como número racional. Apesar de esta dízima ter apenas uma casa decimal, as que representam números irracionais têm sete casas decimais, portanto, o erro dos alunos pode ter sido um lapso, não significando necessariamente que os alunos não conhecem as representações decimais de um número racional e a de um número irracional, nem como comparar números racionais ou irracionais.

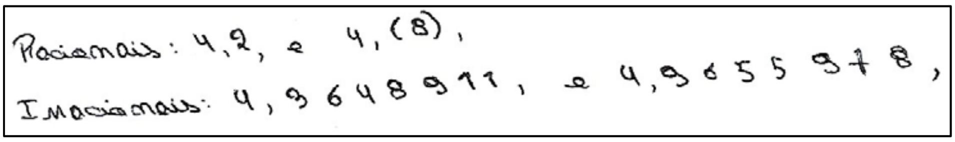


Figura 115 - Resolução de Diogo e Marta (Tarefa 9, Questão 3, Alínea a))

Contrariamente, a aluna Carolina (figura 116) indica dois naturais como exemplos de números racionais e duas dízimas finitas como exemplos de números irracionais. É verdade que todo o número natural é racional, mas o facto de a aluna indicar números naturais como exemplos de números racionais e depois dízimas finitas como exemplos de números irracionais, sugere que ainda não se apropriou das representações de um número racional e de um número irracional.

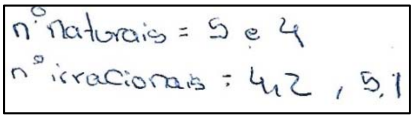

nº Naturais = 5 e 4
nº irracionais = 4,2 , 5,1

Figura 116 - Resolução de Carolina (Tarefa 9, Questão 3, Alínea a))

Na questão 4 da tarefa 9 pretendeu-se que os alunos reconhecessem a existência de infinitos números irracionais, entre dois números, tanto racionais como irracionais. Na análise das resoluções, verifiquei que apenas 3 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa 9 apresentaram uma resposta. No entanto, verifiquei que todos os alunos que não responderam à questão 4, não concluíram a questão 3, portanto acredito que não o fizeram por falta de tempo. Os alunos que responderam à questão 4 classificaram de forma correta as afirmações quanto à sua veracidade ou falsidade, e 2 pares recorreram a exemplos para justificar as suas respostas, alguns deles da questão 3. Henrique e Daniela (figura 117) recorrem aos números 5 e 6, que se apresentavam na alínea b) da questão 3, e depois apresentam exemplos de duas dízimas infinitas não periódicas. A resolução dos alunos sugere que na comparação com números racionais e irracionais eles optam por recorrer à representação decimal de números irracionais, que depois é confirmado pela resolução da alínea b). Estes alunos, como evidenciado na figura 118, recorrem aos dois números irracionais do enunciado da alínea c) da questão 3 e quando apresentam dois exemplos de números irracionais, optam pela representação decimal, sem pôr em hipótese as raízes quadradas de um número natural ou o número π.

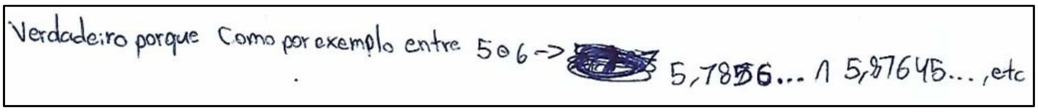

Verdadeiro porque Como por exemplo entre 5 e 6 -> 5,7856... ∧ 5,87645..., etc

Figura 117 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 9, Questão 4, Alínea a))

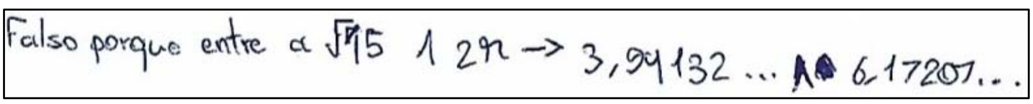

Falso porque entre a $\sqrt{15}$ ∧ 2π -> 3,99132 ... ∧ 6,17201...

Figura 118 - Resolução de Henrique e Daniela (Tarefa 9, Questão 4, Alínea b))

Na resolução da alínea a) da questão 4, Tomás e Vera (figura 119) recorreram às raízes quadradas de números naturais para apresentar exemplos de números irracionais, tal como já tinham feito na resolução da questão 3. A resolução dos alunos, no entanto, sugere que eles reconhecem a existência apenas de um número finito de números irracionais entre 5 e 6, neste caso todos os números escritos na forma $\sqrt{n}$, em que $n \in \{n \in \mathbb{N}: 25 < n < 36\}$. Tomás manifesta até dúvidas na sua resposta com Vera, durante a discussão, como se evidencia no excerto apresentado depois da figura 119. Mas depois vê as suas dificuldades serem ultrapassadas, pois conclui que um número irracional pode não ser necessariamente a raiz quadrada de um número natural. Os alunos mostraram, novamente, que preferem comparar números racionais e irracionais recorrendo às raízes quadradas de números naturais, mas não se deve ignorar o facto de que ao fazer essa opção, a resposta deles não é totalmente conclusiva e que os próprios alunos manifestaram incerteza quanto à sua resposta, enquanto tal não se verificou no caso de Henrique e Daniela (figura 117).

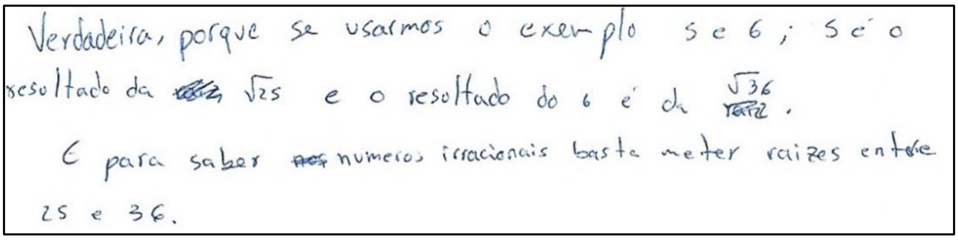

Verdadeira, porque se usarmos o exemplo 5 e 6; 5 é o resultado da $\sqrt{25}$ e o resultado do 6 é da $\sqrt{36}$.
E para saber ~~nos~~ numeros irracionais basta meter raizes entre 25 e 36.

Figura 119 - Resolução de Tomás e Vera (Tarefa 9, Questão 4, Alínea a))

Tomás: oh stôr, se nós fizermos a raiz de 5 é 25 e a raiz de 6 é 36, então nós neste caso só temos dozes raízes… e há mais?

Constança: já entendi… tu estás a fazer que a raiz de 25 é 5…?

Tomás: neste caso, são onze raízes, eu estou a perguntar se está mal… porque daqui para aqui vão… e… eu acho que estão lá onze, portanto não há infinitas… não sei.

Constança: mas os números são infinitos…

Tomás: sim, mas o resultado… de raiz de 26 também é, é, é um número irracional, e aí o 27 também, até ao… 36. Eu estou a perguntar é se há infinitas ou se há onze, com…

Constança: não podemos fazer a raiz de 26 e meio…

Tomás: então, pronto, ok, já percebi.

Constança: podemos fazer $\sqrt{26{,}1}$, $\sqrt{26{,}2}$…

A tarefa 10, *Números irracionais, operações e relações de ordem*, teve como objetivo principal a comparação de números irracionais na forma de raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito. Na questão 1.1. pretendeu-se que os alunos colocassem por ordem crescente seis números escritos na forma $a\sqrt{b}$, em que $a \in \{-1,1\}$ e $b \in \mathbb{N}$, e verifiquei que 12 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa apresentaram uma resposta correta e completa (figura 120).

$$-\sqrt{24} < -\sqrt{13} < -\sqrt{7} < \sqrt{5} < \sqrt{14} < \sqrt{19}$$

Figura 120 - Resolução de Carolina (Tarefa 10, Questão 1.1.)

Num diálogo que tive com Carolina durante o trabalho autónomo, que se apresenta abaixo, a aluna apresentou o uso da calculadora como estratégia de resolução para a questão 1.1., mas depois propõe, corretamente, a comparação dos radicandos.

> **Carolina:** por exemplo, podíamos ir à calculadora, podemos saber quanto é que é essas raízes, mas eu tenho uma dúvida…ah, nós podemos dizer se a raiz é maior consoante o número que está a ser a raiz…?
>
> **Professor:** sim, é mais ou menos isso que tu disseste…
>
> **Carolina:** sim? Ok, então obrigado… então nós não precisamos da calculadora… sabemos que o 14 é maior que o 13…
>
> **Professor:** sim… atenção aos sinais que…

Na questão 1.2. da tarefa 10, pretendia-se que os alunos concluíssem que a raiz quadrada de um número real é maior que a de outro se o radicando da primeira é maior que a do segundo. Na análise das resoluções, verifiquei que 10 dos 14 pares de alunos que realizaram a tarefa reconheceram que $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ quando $a > b$ $(a, b > 0)$, apresentando uma resposta semelhante à dos alunos Diogo e Marta (figura 121).

Quando o número a é maior que o b.

Figura 121 - Resolução de Diogo e Marta (Tarefa 10, Questão 1.2.)

No entanto, Diogo e Marta, manifestaram dificuldades, na interpretação da questão, o que os impediu de definir uma estratégia de resolução. Não é a primeira vez que os alunos manifestaram dificuldades em formular generalizações acerca de propriedades de números, como já se tinha observado na resolução da questão 1.2. da tarefa 2. Quando os alunos são confrontados com questões em que é pedido aos alunos para definirem regras que estabeleçam relações entre números, a questão parece tornar-se mais desafiante e difícil para os alunos, do que questões, em que os alunos são confrontados apenas com os próprios números, seja para estudar a sua natureza, ou para operar com eles, ou para os comparar.

Diogo: eu não estou a perceber bem…

Professor: diz-me lá dois números com raízes, João.

Diogo: $\sqrt{18}$ e $\sqrt{20}$.

Professor: qual é que é maior?

Diogo: $\sqrt{20}$.

Professor: então, quando é que o primeiro é maior que o segundo?

Diogo: que…

Professor: reparem lá… olhem lá bem, $\sqrt{28}$ é maior que $\sqrt{21}$, certo? $\sqrt{12}$ é maior que $\sqrt{9}$, o que é que tu notas nos números quando tu comparas?

Diogo: este aqui [28] é maior que…
Professor: então, quando é que $\sqrt{a}$ é maior que $\sqrt{b}$?

Diogo: o a é maior que o b.

Na questão 2, pretendeu-se que os alunos localizassem na reta real os números $\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2}+3,\ -\sqrt{2}+2,\ \sqrt{2}-5$. Abaixo, apresenta-se uma síntese das respostas dos alunos com base nas suas resoluções durante o trabalho autónomo.

Quadro 4 - Respostas da Questão 2 da Tarefa 10

	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+3$	$-\sqrt{2}+2$	$\sqrt{2}-5$
Correto	12	10	10	10	8	9
Incorreto	1	2	2	2	2	2
Não respondeu	1	2	2	2	4	3

Como mostra o quadro 4, $\sqrt{2}$ foi o que número que teve o maior número de respostas corretas, o que não surpreende, visto que desde o início da intervenção letiva que os alunos têm estado a trabalhar mais com números do tipo $\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ do que com números escritos na forma $a+\sqrt{b}$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N})$. No entanto, um número significativo de alunos localizou esses números corretamente na reta real, que também não me surpreendeu muito, visto que durante a lecionação da representação de números irracionais na reta real, os alunos realizaram uma tarefa em que após representarem $\sqrt{b}$ na reta real, era-lhes pedido para representarem $a+\sqrt{b}$.

Tal como na resolução de André e Susana (figura 122), a maioria dos alunos soube corresponder corretamente a cada ponto representado na reta real o valor da sua abcissa.

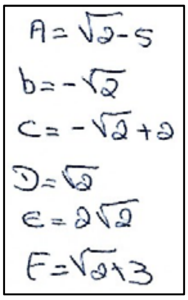


Figura 122 - Resolução de André e Susana (Tarefa 10, Questão 2)

No entanto, alguns alunos que apresentaram respostas corretas manifestaram dificuldades em definir uma estratégia de resolução durante o trabalho autónomo, como o caso de Guilherme, cujo diálogo que eu tive com ele no âmbito do apoio às dificuldades apresento abaixo. O aluno mostra claramente dificuldades em determinar o ponto que poderá ter abcissa $\sqrt{2}$. O aluno não parece evidenciar dificuldades de natureza numérica, visto que apresenta uma ideia correta de qual possa ser um valor aproximado de $\sqrt{2}$, mas a sua resposta sugere dificuldades em localizá-lo na reta real, mesmo depois de eu lhe confirmar a aproximação que ele faz.

Guilherme: professor, eu preciso de saber as raízes…

Professor: então, olha, Guilherme, quanto é que é $\sqrt{2}$?

Guilherme: aqui$[E]$… é o $\sqrt{2}$.

Professor: diz-me lá uma coisa, quanto é que é $\sqrt{2}$?

Guilherme: $\sqrt{2}$? Deve ser 1…

Professor: 1, qualquer coisa. Então, qual é que tu achas que é?… É 1, qualquer coisa, certo? Então qual é que achas que é o ponto que é $\sqrt{2}$?

Guilherme: $\sqrt{2}$é positivo, deve ser para aí do *C*.

Professor: mas tu disseste que…

Guilherme: não, não, deve ser o *D*.

Durante a discussão da tarefa, os alunos apresentaram as estratégias que usaram para associaram os números irracionais apresentados aos pontos apresentados na reta real, como é o caso de Diogo, que explicou como identificou $2\sqrt{2}$ como abcissa do ponto *E*, como se apresenta no excerto do diálogo abaixo. Ao contrário de Guilherme, Diogo não recorre a uma aproximação de $2\sqrt{2}$, mas tenta estabelecer uma relação com $\sqrt{2}$, identificando o primeiro como o dobro do segundo, e depois traduzir isso para a reta real.

Professor: vamos ouvir o Diogo. Diogo, porque é que disseste que o E é o $2\sqrt{2}$?

Diogo: porque é como se tivéssemos duas vezes o $\sqrt{2}$ [Diogo sugere com as mãos que se avança duas vezes a mesma distância].

Vera identificou $-\sqrt{2}$ como a abcissa do ponto B, e depois apresentou a sua justificação, que foi complementada pela de Constança. As intervenções das alunas apresentam-se no excerto apresentado abaixo. Ambas as alunas parecem identificar $-\sqrt{2}$ como simétrico de $\sqrt{2}$ e, portanto, o ponto que tem abcissa $-\sqrt{2}$ deve estar à mesma distância da origem da reta real que o ponto de abcissa $\sqrt{2}$, mas situado à sua esquerda. As alunas já tinham concluído que $\sqrt{2}$ era a abcissa do ponto D, e depois concluíram, assim, que $-\sqrt{2}$ era a abcissa do ponto B.

Vera: $-\sqrt{2}$ é o B.

Professor: a Vera diz que o B é menos raiz de 2. Toda a gente concorda?

Alguns alunos: sim.

Professor: porquê, Vera?

Vera: porque… vai estar ao contrário, se nós virmos… é o inverso de $\sqrt{2}$.

Constança: simétrico.

Para explicar que $-\sqrt{2}+2$ é a abcissa do ponto C, o aluno Tomás desloca-se ao quadro e apresenta a sua explicação para esclarecer um colega. Tomás tinha sido um dos alunos a representar corretamente na reta real números irracionais escritos na forma $a+\sqrt{b}$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N})$ (figura 69) e soube estabelecer conexões entre os conteúdos desse tópico e a questão 2 da tarefa 10. O aluno mostra saber que quando se conhece a localização do ponto de abcissa $\sqrt{b}$ $(b \in \mathbb{N})$ na reta real, o ponto de abcissa $a+\sqrt{b}$ $(a \in \mathbb{Z})$ é o transformado do primeiro segundo uma translação do vetor $\vec{u}=(a,0)$.

Tomás: isto [ponto B] é -2. Se tu meteres mais 2, vai para aqui [ponto C]. Percebeste?

Professor: Tomás, acho que tens de repetir.

Tomás: tens aqui o -2…

Professor: menos quê, Tomás? Que número é esse?

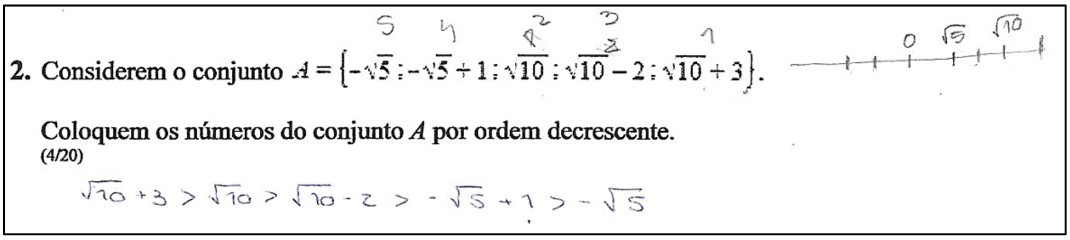
Tomás: $-\sqrt{2}$. Se fores mais 1, vais ter aqui [entre – 1 e 0], se for mais 2, vais ter aqui [ponto C], por isso é o C.

Na questão 2, pretendia-se que os alunos colocassem por ordem decrescente os números $-\sqrt{5}, -\sqrt{5}+1, \sqrt{10}, \sqrt{10}-2, \sqrt{10}+3$. Numa análise das resoluções, verifiquei que 13 dos 14 pares de alunos souberam colocar por ordem decrescente todos os números, tal como Guilherme na sua resolução da figura 123.

$$\sqrt{10}+3>\sqrt{10}>\sqrt{10}-2>\sqrt{5}+1>-\sqrt{5}$$

Figura 123 - Resolução de Guilherme (Miniteste 2, Questão 2)

Uma resolução que também me chamou à atenção foi a de Teresa (figura 124), que recorre à representação de alguns dos números de referência na reta real para resolver a questão corretamente.


2. Considerem o conjunto $A=\{-\sqrt{5}\,;-\sqrt{5}+1\,;\sqrt{10}\,;\sqrt{10}-2\,;\sqrt{10}+3\}$.

Coloquem os números do conjunto A por ordem decrescente.
(4/20)

$\sqrt{10}+3>\sqrt{10}>\sqrt{10}-2>-\sqrt{5}+1>-\sqrt{5}$

Figura 124 - Resolução de Teresa (Miniteste 2, Questão 2)

Os dados recolhidos acerca do número de respostas corretas para a alínea b) da questão 1 e para a questão 2 deixaram-me surpreendido de forma positiva, pois na resolução da tarefa 8, os alunos tinham recorrido maioritariamente à representação decimal para apresentar exemplos de números irracionais. Isto fez-me crer que os alunos estavam mais familiarizados com a representação decimal de um número irracional ao comparar números irracionais com números reais, mas neste miniteste as suas resoluções sugeriram que tiveram menos dificuldades em comparar números irracionais na forma de raiz quadrada de um número natural do que números racionais e irracionais na forma de dízima.

Resumindo, os alunos comparam números irracionais usando diferentes estratégias, consoante as suas representações. Quando os números irracionais estão representados em forma de dízima, alguns alunos são capazes de os comparar e estabelecer relações de ordem entre eles e até com outros tipos de dízimas, através da comparação dos algarismos das respetivas ordens. Quando confrontados com dízimas infinitas periódicas, alguns alunos escrevem a dízima sem os parênteses até que o número de casas decimais seja, pelo menos, igual à da dízima que pretendem comparar. Uma estratégia adotada por uma aluna na comparação de números na forma de dízima foi recorrer à reta real e determinar qual dos pontos que tinham esses números como abcissas se encontrava a uma maior ou menor distância da origem da reta real. Quando os números irracionais estão representados na forma de raiz quadrada de um número natural, a maioria dos alunos foi capaz de estabelecer relações de ordem entre eles, e recorrem a diferentes estratégias para o fazer. Se os radicandos são diferentes, a maioria dos alunos comparam-nos para determinar qual das raízes quadradas é maior. Alguns dos alunos evidenciaram assim conhecimentos referentes às representações de números irracionais lecionados durante a intervenção letiva, o que me deixou satisfeito. Um dos alunos mobilizou os conhecimentos relacionados com a representação de números irracionais na reta real que tinham sido lecionados durante a intervenção letiva, para estabelecer relações de ordem entre raízes quadradas de números naturais.

Relativamente às dificuldades, a maioria dos alunos manifestou dificuldades ao comparar dízimas infinitas não periódicas quando essa comparação se focou nas partes decimais representadas por reticências. Algumas dificuldades estiveram relacionadas com o facto de alguns alunos desconhecerem o significado das reticências. Na comparação de raízes quadradas de números naturais, um aluno sugeriu dificuldades em localizar na reta real o ponto cuja abcissa se escrevia na forma $\sqrt{a}$ $(a \in \mathbb{N})$. O aluno recorreu ao seu valor aproximado, mas mesmo tendo disponível para visualização a reta real, manifestou dificuldades.

Capítulo 6 – Conclusões e Reflexão Final

Neste capítulo, apresento uma síntese do estudo, que inclui uma breve introdução, os objetivos e as questões orientadores de investigação, assim como algumas referências à unidade de ensino e à metodologia adotada. Depois apresento as conclusões do estudo, respondendo às questões orientadoras formuladas em articulação com o enquadramento curricular e teórico. Por fim, apresento uma reflexão final acerca da minha intervenção letiva, do que aprendi como professor, das aprendizagens dos alunos, e de contributos para possíveis trabalhos no futuro.

6.1. Síntese do estudo

Este estudo baseia-se na intervenção letiva que eu realizei numa turma do 8º ano de escolaridade na Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto em Queluz. A intervenção letiva contou com dez aulas de 50 minutos que decorreram entre 13 a 31 de março e entre 20 a 24 de abril do ano letivo 2016-2017, focada na aprendizagem dos números irracionais, que se enquadra no tema "Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais" do domínio "Números e Operações" do Programa de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013).

Com este estudo, pretendi compreender como os alunos do 8º ano de escolaridade se apropriam da noção de número irracional e como a utilizam, e que dificuldades manifestam na resolução de tarefas que envolvem estes números. Com o objetivo definido, tracei as seguintes questões orientadoras:

1. Como é que os alunos identificam números irracionais em várias representações?
2. Como é que os alunos representam números irracionais na reta real?
3. Como é que os alunos operam com números irracionais?
4. Como é que os alunos comparam números irracionais em várias representações?

Para fundamentar este trabalho, assim como a metodologia adotada, recorri às orientações curriculares sobre a aprendizagem da Matemática e a literatura sobre a noção de número irracional. Mais especificamente, foquei-me na definição e nas diferentes representações do número irracional, na representação de números irracionais na reta real, nas regras operatórias com números irracionais e nas relações ordem entre números irracionais.

Em relação à recolha de dados que feita durante a intervenção letiva, recorri à observação participante das aulas com gravação áudio e vídeo das aulas e à recolha documental das resoluções dos alunos das tarefas propostas e dos testes de avaliação que envolviam o tema dos números irracionais.

6.2. Conclusões do estudo

6.2.1. Identificação de números irracionais em várias representações

Segundo Horner, Halliday, Blyth, Adams e Wheaton (2010), um número é irracional quando se conclui que não é racional, e foi com base nesta conclusão que se iniciou a intervenção letiva com os alunos a explorarem as diferentes representações de um número racional. Para classificar um número escrito na forma de fração quanto à sua irracionalidade, Zazkis e Sirotic (2010) observam que os professores de Matemática em formação visados no seu estudo exibem uma preferência pela representação decimal. De forma semelhante, os alunos deste estudo recorreram à representação decimal de uma fração para determinar o tipo de dízima que representava. No seu estudo, com 18 alunos de cada um dos três primeiros anos do ensino médio (equivalente ao ensino secundário em Portugal), Bartolomeu (2010) apresenta-lhes uma questão de escolha múltipla para que identifiquem a dízima infinita periódica, quando numa das alternativas se encontrava um número na forma de dízima finita e os restantes três estavam representados na forma de fração, em que dois representavam dízimas finitas e o terceiro uma dízima infinita periódica. E contrariamente ao que o autor observou, as resoluções dos alunos sugerem que a maioria dos alunos participantes neste estudo, no início da lecionação, mostrou apropriação da noção de dízima finita e de dízima infinita periódica e foram capazes de as reconhecer em diferentes representações. No final da intervenção letiva, a maioria dos alunos mostrou-se capaz de identificar uma dízima infinita não periódica com base na sua representação em forma de dízima. Assim, quando o número se encontra representado em forma de dízima ou na forma de fração, os alunos são capazes de o classificar quanto à sua irracionalidade. No final da discussão da primeira tarefa, alguns alunos mostraram compreender quando uma fração representa uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica com base no seu denominador.

Malacka (2014) observa a preferência dos alunos do ensino secundário do seu estudo em recorrer à representação decimal para testar a irracionalidade de um número, incluindo raízes quadradas de números naturais. A maioria dos alunos deste estudo também evidenciou uma preferência para recorrer a uma diferente representação de uma raiz quadrada de um número natural. Eles efetuam o cálculo da raiz quadrada e se obtêm um número natural, concluem que é racional, caso contrário, concluem que é irracional. Alguns alunos também classificam a raiz quadrada de um número natural quanto à sua irracionalidade baseando-se no seu radicando.

Durante a intervenção letiva, a maioria dos alunos deste estudo também foi capaz de determinar a que conjunto numérico os números inteiros e os números escritos em forma de fração e decimal pertencem. As noções dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ foram previstas como conhecimentos prévios, e com base nas suas resoluções, a maioria dos alunos evidenciou esse conhecimento, assim como foi capaz de identificar números naturais e inteiros. A noção do conjunto $\mathbb{Q}$ foi prevista como conhecimento prévio, que a maioria dos alunos mostrou ter durante a intervenção letiva, e no final da discussão de uma tarefa, também mostrou reconhecer que um número racional pode ser representado por uma fração, por um número inteiro, por uma dízima finita e por uma dízima infinita periódica. No final da intervenção letiva, a maioria dos alunos também soube reconhecer que a raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito pertence ao conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, recorrendo às estratégias descritas acima quando pretendem testar a sua irracionalidade. Contrariamente ao que observaram Rezende e Nogueira (2009) acerca dos estudantes universitários de Matemática e os professores de Matemática visados no estudo de Pietropaolo, Corbo e Campos (2013), os alunos deste estudo foram capazes de reconhecer que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ quando a tarefa proposta continha um diagrama de Venn, assim como quando lhes foi pedido para relacionarem os conjuntos numéricos através do símbolo $\subset$. Antes disso, também tinha sido pedido aos alunos para estabelecerem relações entre cada par de conjuntos numéricos com o mesmo símbolo.

No entanto, os alunos deste estudo evidenciaram dificuldades em classificar alguns números quanto à sua irracionalidade, que estiveram associadas à representação em que era apresentado cada número e à representação usada pelo aluno para apoiar essa classificação. Segundo Duval (2012), é através das representações que o aluno pode aceder ao objeto matemático. Os alunos deste estudo procuraram usar conversões entre as representações dos números que lhes eram pedidos para os classificar quanto à irracionalidade. Essa conversão, tal como Duval (2012) notara, revelou-se uma fonte de dificuldades para os alunos. Os alunos deste estudo evidenciaram dificuldades em classificar alguns números quanto à sua irracionalidade na forma de fração com base apenas nessa representação e, ao recorrerem à calculadora para fazer essa classificação com base na sua representação decimal, como tinham observado Zazkis e Sirotic (2004; 2010), sentiram dificuldades por não exibir um número suficiente de dígitos. Barbosa (2013) admitiu que os alunos do 9º ano de escolaridade possam ter dificuldades na classificação de números reais quanto à sua irracionalidade quando escritos na forma de radical, e alguns alunos deste estudo evidenciaram igualmente algumas dificuldades quando baseados apenas nesta representação, enquanto não se apropriaram da ideia que a raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito constitui um número irracional. O desconhecimento desta regra também foi uma das causas que levou alguns dos alunos a manifestarem dificuldades em determinar a que conjunto numérico pertenciam números representados na forma de raiz quadrada de um número natural. Alguns alunos deste estudo também evidenciam dificuldades numéricas na determinação do conjunto que a raiz quadrada de um número natural pertence por não serem capazes de calcular essa raiz quadrada.

6.2.2. Representação de números irracionais na reta real

No final da intervenção letiva, a maioria dos alunos deste estudo foi capazes de representar raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos na reta real. Segundo o processo definido por Gardner (1997), a representação da raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito exige a determinação de dois quadrados perfeitos cuja soma equivale ao quadrado da dessa raiz, a construção de um triângulo retângulo cujos comprimentos sejam iguais às raízes quadradas dos quadrados perfeitos e o traçar de um arco de circunferência desde o vértice de interseção da hipotenusa e da altura do triângulo até à reta real. No seu estudo, em que pedem a professores de ensino secundário em formação para obterem a localização exata da raiz quadrada de 5 na reta real, Sirotic e Zazkis (2007) defendem que este processo é acessível se o Teorema de Pitágoras for conhecido, e se os alunos forem capazes de relacioná-lo com o processo de construção geométrica, a localização de números irracionais na forma de raiz quadrada na reta real torna-se exequível (Oliveira & Fiorentini, 2007, citados em Barbosa, 2013). A maioria dos alunos deste estudo aplicou o Teorema de Pitágoras corretamente e também concluiu que a representação de $\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ na reta real requer dois números naturais a e b tal que $a^2 + b^2 = n^2$. Contrariamente ao que observa Barbosa (2013), no seu estudo, estes alunos foram capazes de relacionar a construção de um triângulo retângulo com a representação de uma raiz quadrada de um número natural na reta real. A maioria dos alunos também reconheceu a necessidade de traçar a circunferência para representar $\sqrt{n}$ na reta real. Enquanto Sirotic e Zazkis (2007) observaram no seu estudo um número significante de professores a recorrer a uma aproximação decimal da raiz quadrada de um número natural para a representar na reta real, a maioria dos alunos deste estudo reconheceu no final da lecionação da representação de números irracionais na reta real a necessidade de recorrer a elementos geométricos para o fazer. Quando obtêm a representação de $\sqrt{n}$ na reta real, alguns alunos também representam $-\sqrt{n}$ na reta real. Destes alunos, a maioria reconhece que basta efetuar uma rotação de centro na origem da reta real e amplitude de $180°$ do ponto de abcissa $\sqrt{n}$, enquanto outros recorrem à construção de um triângulo retângulo, que é simétrico ao triângulo usado para representar $\sqrt{n}$ na reta real, em relação à reta $x = 0$. Depois de representarem $\sqrt{n}$ na reta real, alguns alunos representam $a + \sqrt{n}$ $(a \in \mathbb{Z})$ na reta real, efetuando uma translação do ponto de abcissa $\sqrt{n}$ segundo o vetor $\vec{u} = (a, 0)$.

Segundo defendem Sirotic e Zazkis (2007), o processo de construção geométrica utilizado para a representação de um número irracional na reta real torna mais acessível para o aluno compreender que a cada número irracional corresponde um único ponto na reta real. Esta ideia não foi bem apreendida por alguns alunos, pois na resolução de uma questão no final da lecionação da representação de números irracionais na reta real, atribuíram dois pontos distintos a uma mesma abcissa, o que vai ao encontro do que é defendido por Melo (1999), em que os alunos restringem o seu conhecimento matemático ao aspeto operacional, e não ao significado.

6.2.3. Operações com números irracionais

No seu estudo sobre os conhecimentos acerca de radicais de estudantes universitários que tenham frequentado ou concluído uma disciplina de Cálculo, Erlandson (2013) defende que os alunos devem ter acesso a exemplos simples e descobrir autonomamente como multiplicar e dividir radicais. A adoção deste método de ensino apresentou um resultado bastante positivo, visto que todos os alunos, no final deste estudo, foram capazes de multiplicar e dividir raízes quadradas. Este método também foi adotado para a lecionação da adição e da subtração de raízes quadradas com o mesmo radicando, obtendo um resultado igualmente positivo ao da multiplicação e da divisão, estando de acordo com o que Costa (2009) observou nos seus alunos do 8º ano de escolaridade para a multiplicação, mas contrariando-o em relação à divisão. Estes resultados também são contrários a algumas das conclusões que Sirotic e Zazkis (2006) apresentam sobre a compreensão da irracionalidade de um número por parte de professores de matemática em formação para o ensino secundário. Os autores observam que alguns dos professores invocam a impossibilidade de efetuar a adição ou a multiplicação de números irracionais, por serem representados por dízimas infinitas não periódicas, enquanto nenhum aluno deste estudo põe em causa a realização de operações matemáticas com números irracionais devido às suas representações decimais.

No final do estudo, os alunos continuaram a manifestar dificuldades de conceção na adição e na subtração de raízes quadradas com radicandos diferentes, indo de acordo com o que observou Costa (2009) no seu estudo. No seu estudo que visa analisar os erros que alunos do 9º ano de escolaridade cometem na realização de operações com radicais, Ozkan (2011) sugere que os alunos cometem este erro porque acreditam que a raiz quadrada da adição e da subtração goza da propriedade distributiva, e sugere que o método de ensino que Erlandson (2013) defende para a lecionação da multiplicação e da divisão de radicais, seja aplicado para que os alunos compreendam que não se podem adicionar, nem subtrair radicais a não ser que tenham o mesmo radicando. O facto de este método não ter sido aplicado igualmente para a adição e a subtração de raízes quadradas com radicandos iguais e para a multiplicação e a divisão de radicais, pode ser a razão de não se terem obtido os mesmos resultados que se verificaram nestas operações. Os alunos calculam incorretamente o produto de um número natural por uma raiz quadrada de um número natural, pois multiplicam o número natural pelo radicando.

Quanto à potenciação, especificamente o quadrado de um número, os alunos deste estudo calcularam o quadrado de um número escrito na forma $\sqrt{a}$ $(a \in \mathbb{N})$ transformando-o num produto, obtendo resultados diferentes para esse produto e consequentemente para a potenciação. Alguns alunos obtiveram como resultado a, mas apresentaram $\sqrt{a^2}$ como resposta final, o que está de acordo com o que Costa (2009) observa no seu estudo. Mas enquanto a autora argumenta que isso se deve à crença, por parte dos alunos, de que a multiplicação de duas raízes quadradas não pode ser equivalente a um número que não é uma raiz quadrada, os alunos deste estudo não dão indicação de a partilhar, simplesmente calculam a raiz quadrada do número.

6.2.4. Comparação de números irracionais

No processo de comparação de números irracionais, Quaresma (2010) observou que uma possível estratégia dos alunos é acrescentar zeros à direita dos números de uma dízima para que todos fiquem com o mesmo número de casas decimais e depois os comparar. De forma semelhante, os alunos deste estudo, ao disporem de dízimas infinitas periódicas, escrevem-nas sem os parênteses até ter, pelo menos, o mesmo número de casas decimais que a dízima com que pretende efetuar a comparação. A maioria dos alunos estabelece relações de ordem entre as dízimas, comparando os algarismos das respetivas ordens, mas o recurso à localização dos números na reta real também foi uma estratégia adotada. Contrariamente ao que observou Quaresma (2010), não houve evidências de os alunos não serem capazes de comparar dízimas com diferentes quantidades de casas decimais. A maioria dos alunos deste estudo compararam corretamente raízes quadradas de números naturais recorrendo à comparação dos respetivos radicandos, isto é, quanto maior for o radicando, maior é a raiz quadrada, mas também se mostrou capaz de comparar raízes quadradas recorrendo à representação na reta real. Barbosa (2013) observou no seu estudo que a comparação e a ordenação de números reais se tornam mais fáceis para os alunos quando se recorre à representação na reta real. Neste estudo, a maioria dos alunos deste estudo foi capaz de estabelecer relações de ordem entre raízes quadradas com recurso à reta real, tanto como através da comparação dos radicandos.

Os alunos apenas evidenciaram dificuldades na comparação de dízimas infinitas não periódicas, mas por desconhecerem o significado da parte decimal representada por reticências.

6.3. Reflexão Final

Para concluir este trabalho, apresento aqui uma reflexão acerca da minha intervenção letiva, especificamente as minhas aprendizagens e as dos alunos, as opções que tomei como professor, que aspetos acredito que ainda podem ser melhorados, e que contributos este trabalho pode trazer para a comunidade letiva e a de investigação.

Quando iniciei o Mestrado de Ensino em Matemática no Instituto de Educação, a única experiência de lecionação que trazia era um número de anos a dar explicações de Matemática e quando iniciei a intervenção letiva, a essa experiência se acrescia uma aula em que acompanhei o trabalho autónomo de alunos do 7º ano de escolaridade e uma aula em que discuti uma tarefa com os alunos do 12º ano de escolaridade. Com uma intervenção que incluiu a lecionação de uma unidade de ensino com a duração de um mês, penso que a experiência se revelou inédita e, claro, bastante contributiva para as minhas aprendizagens como professor.

Tive a oportunidade de trabalhar com um professor cooperante que, além de me desafiar a refletir acerca das tarefas que ele propunha à turma que acompanhei, do trabalho autónomo e da discussão das tarefas, também o fazia em relação a aspetos relacionados com a gestão das interações entre os alunos e das com o professor e os alunos em qualquer um dos momentos referidos. Além disso, tive a oportunidade de trabalhar com uma turma que me mostrou elementos de uma aula que nem sempre fui capaz de visualizar, provavelmente porque passei grande parte da minha vida numa sala de aula como aluno, e não como professor. Observei que os alunos são capazes de adotar várias estratégias de resolução de tarefas e apresentar resultados que vão além das nossas expetativas, e que, portanto, como professores, nunca devemos recear em desafiar os nossos alunos para irem além das nossas expetativas. Observei que os alunos podem apresentar diferentes tipos de dificuldades na resolução de tarefas e que se nós não as prevemos, não definimos previamente estratégias de apoio a essas dificuldades. Assim, o professor corre o risco de investir uma quantidade considerável de tempo no apoio a essas dificuldades imprevistas, alargando o tempo da aula previsto para o trabalho autónomo, e comprometendo o da discussão. Concluo assim que na preparação de tarefas para as aulas, é necessário refletir o máximo possível sobre as dificuldades que possam surgir dos alunos na resolução de tarefas, pois podem comprometer a discussão da tarefa e o objetivo da aula. Penso que é bastante vantajoso envolver a turma na discussão coletiva da tarefa, pois observei que os alunos que acompanhei tentavam acompanhar o que era discutido, mostravam-se interessados em partilhar as suas resoluções e em manifestar as suas dúvidas. Uma coisa que os alunos também me ajudaram imenso foi perceber que uma turma na comunidade letiva portuguesa atual pode exibir vários tipos de comportamentos e atitudes em qualquer um dos momentos da aula, por várias razões, e que se torna fundamental o professor aprender a gerir as interações dos alunos se quiser ter sucesso.

Em relação às minhas opções metodológicas, penso que é fundamental como as tarefas são redigidas consoante os objetivos de aprendizagem definidos e, pelos motivos mencionados anteriormente, refletir sobre as dificuldades que possam suscitar. Creio que as tarefas também devem ser feitas de modo que os alunos se sintam desafiados, ainda mais quando sabemos que podemos estar a lidar com uma turma que gosta de aprender e ter um bom desempenho na resolução de tarefas. Também penso que é fundamental o professor investir o máximo possível na preparação dos vários momentos de aula. Na apresentação da tarefa, o professor deve transmitir aos alunos todas as orientações que considera úteis para o envolvimento deles na resolução da tarefa. Durante o trabalho autónomo, o professor deve acompanhar sempre o trabalho dos alunos, averiguar se eles estão a ser capazes de resolver a tarefa, e não se limitar a esperar que os alunos peçam ao professor para esclarecimento de dúvidas. O professor deve fazer registo das estratégias de resolução e das dificuldades que observa por parte dos alunos, pois tanto a primeira como a segunda podem contribuir para as aprendizagens dos conteúdos lecionados. E o professor deve certificar, assim, que são abordadas durante a discussão coletiva da tarefa, seja por meio dos alunos, seja ele próprio a fazê-las emergir. Na discussão da tarefa, também penso que o professor deve refletir se o uso de tecnologia pode ser vantajoso para que os alunos realizem aprendizagens. O professor deve também investir no trabalho cooperativo entre os alunos, pois eles assim discutem estratégias de resolução e sentem-se envolvidos na resolução das tarefas, o que é um primeiro passo para constituírem os seus próprios conhecimentos. Perante isto e recordando o meu acompanhamento da turma durante o ano letivo e os conselhos do professor cooperante, penso que o professor deve ser ele a decidir a distribuição dos alunos na sala de aula, procurando agrupar alunos consoante os seus níveis de desempenho na disciplina de Matemática e as relações que eles têm uns com os outros. Se o professor tiver esta intenção, torna-se assim, a meu ver, fundamental para o professor conhecer os seus alunos.

Em relação às aprendizagens dos alunos, penso que eles se apropriaram dos tópicos que lhes lecionei, especificamente, a existência de um novo tipo de dízima (dízima infinita não periódica), de um novo tipo de número (o número irracional) e de um novo conjunto numérico ($\mathbb{R}$). Penso que os alunos também se apropriaram de diversas representações dos números irracionais (na forma de dízima e na forma de raiz quadrada de um número natural), e que reconhecem que para representar raízes quadradas na reta real é necessário um processo de construção geométrica. Os alunos aprenderam, igualmente, a somar e a subtrair raízes quadradas com radicandos iguais e a multiplicar e dividir raízes quadradas de números naturais, e também a compará-las. Para a lecionação de qualquer um destes tópicos, recorri a uma diversidade de tarefas (questões de exploração, problemas e exercícios) que permitiram diversas estratégias de resolução, o que depois enriqueceu a discussão das tarefas e das diferentes dificuldades evidenciadas pelos alunos. Desta forma, foi possível conhecer a situação de cada aluno em relação à sua apropriação dos tópicos lecionados e ajudá-los a ultrapassar as suas dificuldades. Se é possível alterar uma tarefa para que esta possa contribuir para qualquer um dos objetivos referidos, então o professor deve sempre refletir esse aspeto.

Apesar das aprendizagens que fiz ao lecionar numa sala de aula, penso que existem aspetos a melhorar. Durante o trabalho autónomo, os alunos manifestaram dificuldades a resolver as tarefas que eu não tinha previsto antecipadamente e, como referi anteriormente, devo tentar sempre prever qualquer tipo de dificuldade que possa surgir por parte dos alunos. Também senti dificuldades na gestão das interações com e entre os alunos durante a discussão das tarefas, e isso provocou o prolongamento da discussão de questões, que a meu ver possa ter sido desnecessário, comprometendo a discussão de outras questões, portanto considero que é um aspeto que devo melhorar. Como a realização deste estudo me conduziu à pesquisa de artigos que se focassem nos números irracionais, descobri que existe uma discussão a nível internacional acerca das aprendizagens de vários tópicos matemáticos de alunos de vários graus de ensino. Um professor pode assim encontrar várias estratégias para a lecionação da Matemática, e assim melhorar os seus próprios métodos de ensino caso necessário. No final da realização deste estudo, ao olhar para a análise de dados e as conclusões feitas, surgiram momentos em que refleti se seria possível fazer alguma opção metodológica que permitisse ajudar os alunos a ultrapassarem as dificuldades que ainda mantinham.

Penso que este trabalho reflete de forma realista o trabalho de uma turma do 8º ano de escolaridade durante a lecionação dos números irracionais, visto que participaram alunos de diferentes níveis de desempenho na disciplina de Matemática, nas tarefas e na avaliação, e que exibiram vários tipos de dificuldades. Na pesquisa de bibliografia para a fundamentação teórica, descobri um grande número de artigos de investigação que se focavam na irracionalidade de um número na forma de fração e na forma de dízima, quando comparado com os que focavam num número na forma de raiz quadrada de um número natural. Considero assim que se deveria investir na investigação dos conhecimentos dos alunos do ensino básico das raízes quadradas de números naturais, especificamente como os classificam quanto à irracionalidade, como os representam na reta real, como operam com eles e como os comparam. Como vivemos num mundo cada vez mais tecnológico, penso que seria útil analisar os contributos de ferramentas tecnológicas para a aprendizagem dos números irracionais, mais concretamente, as raízes quadradas de números naturais. Quando digo ferramentas tecnológicas e que tipos de contributos, refiro-me ao uso da calculadora para classificar uma raiz quadrada quanto à irracionalidade e o uso de *softwares*, como o GeoGebra, para a representar raízes quadradas na reta real.

Referências

Abrantes, P. (1985). *Planificação no ensino da Matemática.* Texto de apoio à disciplina de Metodologia da Matemática. Lisboa: Autor.

Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas (2013). *Projeto educativo 2013-2017*. Queluz: Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas.

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the learnings of Mathematics, 7*(2), 18-23.

Barbosa, S. (2013). *Aprendizagem dos números reais: um estudo com alunos do 9º ano* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino da Matemática). Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Bartolomeu, V. (2010). *Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio ao conjunto dos números reais* (Tese de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Bento, A. (2012). Investigação quantitativa e qualitativa: dicotomia ou complementaridade? *JA, Revista da Associação Académica da Universidade da Madeira, 7*(64), 40-43.

Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Coito, C. (2016). *A noção de segunda derivada e suas aplicações: um estudo no 12º ano* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada de Mestrado em Ensino da Matemática). Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Costa, L. (2009). *Números reais no ensino fundamental: alguns obstáculos epistemológicos.* (Dissertação de Mestrado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

D'Amore, B. (2007). Mathematical objects and sense: how semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, *7*, 23-45.

Dias, V., Pitolli, A., Prudêncio, C., & Oliveira, M. (2013). O diário de bordo como ferramenta de reflexão durante o estágio curricular supervisionado do curso de Ciências Biológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, Bahia. In *Atas do 9.º Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*. Retirado de http://abrapecnet.org.br/atas_enpec/ixenpec/atas/resumos/R1143-1.pdf em 18 de março de 2017.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Educação Matemática, 7*(2), 266-297.

Erlandson, K. (2013). *A study of college students' misconceptions of radical expressions* (Master thesis of Science in Education, Mathematics Education (7-12)). University of New York, New York.

Ferreira, L., Torrecilha, N., & Machado, S. (2012). A técnica de observação em estudos de administração. In *36.º Encontro da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração.* Retirado de: http://www.anpad.org.br/admin/pdf/2012_EPQ482.pdf em 18 de março de 2017.

Freitas, J., & Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. *Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão 2*(3), 9-34.

Gardner, M. (1997). The square root of two = 1.414213562373095… *Math Horizons, 4*(4), 5-8.

Horner, M., Halliday, S., Blyth, S., Adams, R., & Wheaton, S. (2010). *The Free High School Science Texts: Textbooks for High School Students Studying the Sciences Mathematics Grade 10.* Retirado de http://ftp.yzu.edu.tw/nongnu/fhsst/Mathematics_Grade_10-12.pdf em 4 de janeiro de 2017.

Hurst, M., & Cordes, S. (2016). Rational-number comparison across notation: fractions, decimals, and whole numbers. *Journal of Experimental Psychology Human Perception & Performance, 42*(2), 281-293.

Jorgensen, D. (1989). *Participant observation, A methodology for human studies*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Jover, R. S. R. (2013, julho). Números irracionais e sua compreensão pela experiência. Comunicação apresentada no XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba.

Kawulich, B. (2005). Participant Observation as a Data Collection Method. *Forum: Qualitative Social Research* 6(2). Retirado de http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/466/997 em 24 de março de 2017.

Kidron, I. (2018). Students' conceptions of irrational numbers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 4(1), 94-118.

Magro, F. C., Fidalgo, F., & Louçano, P. (2016). *Pi Volume 2 3º Ciclo do Ensino Básico 8º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Edições ASA.

Malacka, Z. (2014). Testing of irrational numbers at the high school. *Acta Mathematica, 17*, 109-114.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares da Matemática de Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Melo, S. (1999). A compreensão do conceito de números irracionais e sua história: um estudo junto a alunos dos cursos de ciências exatas. *Symposium, 1*, 27-36.

Mendes, S., Rodrigues, C., & Silva, P. (2011). Números irracionais: uma observação de regularidades. In *13.ª Conferência Interamericana de Educação*. Retirado de http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/1927.pdf em 28 de janeiro de 2017.

Menezes, L., Ferreira, R., Martinho, M., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação matemática nas práticas letivas dos professores. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-161) Lisboa: UIDEF.

Moreira, P., Soares, E., & Ferreira, M. (2009). Algumas conceções de licenciados em Matemática sobre o sistema dos números reais. *Zetetiké 7*(12), 95-117.

Mózer, G., & Bortolossi, H. (2016). Para que servem os números irracionais? Indo além das fórmulas de perímetros, áreas e volumes. In *12.º Encontro Nacional de Educação Matemática*. Retirado de http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6902_2921_ID.pdf em 28 de janeiro de 2017.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Neves, M., A., F., & Faria, M. L. M. (2003). *Matemática 9º ano*. Porto: Porto Editora.

Nobre, R., & Druck, I. (2015). Uma proposta para o ensino dos números irracionais no 8.º ano do ensino fundamental. In *2.º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática*. Retirado de https://www.ime.usp.br/images/arquivos/pos/posmpemat/ronaldo.pdf em 13 de janeiro de 2017.

Nunes, F. (1996, novembro). *Será de ir em grupos na aprendizagem da Matemática?*. Conferência apresentada no Profmat96, Almada.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. (2012). The use of classroom videos as a context for research on teachers' practice and teacher education. In *12th International Congress on Mathematical Education*. Retirado de http://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/7840/1/Oliveira%2c%20Menezes%20Canavarro%20pre-ICME12.pdf em 24 de março de 2017.

Ozkan, E. (2011). Misconceptions in radicals in high school mathematics. *Procedia – Social and Behavioural Sciences, 15*, 120-127.

Ozkan, A., & Ozkan, E. (2012). Misconceptions and learning difficulties in radical numbers. *Procedia – Social and Behavioural Sciences, 46*, 462-467.

Passos, C., I., & Correia, O. F. (2016). *Matemática em ação 8*. Lisboa: Raiz Editora.

Pietropaolo, R., Corbo, O., & Campos, T. (2013). Os números irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores. *In 1.º Congreso de Educacíon Matemática de América Central y El Caribe*. Retirado de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/415-398-1-DR-C.pdf em 4 de janeiro de 2017.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of the mathematical method*. New Jersey, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-33). Lisboa: APM.

Ponte, J., & Quaresma, M. (2014). Representações e raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas envolvendo números racionais numa abordagem. *Uni-pluri/versidad, 14*(2), 102-114.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, *13*(2), 51-74.

Ponte, J., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante 22*(2), 55-81.

Ponte, J., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante, 24*(2), 111-134.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino.* (Dissertação de Mestrado em Educação) Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Quaresma, M., & Ponte, J. (2008). A comunicação na sala de aula numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais no 5.º ano. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 261-279). Lisboa: UIDEF.

Queiroz, D., Vall, J., Souza, A., & Vieira, N. (2007). Observação participante na pesquisa qualitativa: conceitos e aplicações na área da saúde. *Enfermagem UERJ 15*(2), 276-283.

Rezende, V., & Nogueira, C. (2009). Temas difíceis de ensinar em Matemática: relato de uma discussão sobre números. *In Atas do 10.º Encontro Paranaense de Educação Matemática*. Retirado de https://docplayer.com.br/17744588-Temas-dificeis-de-ensinar-em-matematica-relato-de-uma-discussao-sobre-numeros.html em 28 de janeiro de 2017.

Roche, A. (2005). Longer or larger – or is it? *Australian Primary Mathematics Classroom 10*(3), 11-16.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2006). Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 49-76.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line – where are they?. *International Journal of Mathematical Education 38*(4), 477-488.

Stein, M., & Smith, M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. Da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School 3*(4), 268-275.

Thudichum, B., Passos, I., C., & Correia, O., F. (2013). *Matemática em Ação 9*. Lisboa: Raiz Editora.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In Hoines, M., J., & Fuglestad, A. B. (Eds.) *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 497-504). Bergen: PME

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: exposing the missing link. *Issues in Mathematics Education 16*, (14-41).

Anexos

Anexo 1 – Autorização aos Encarregados de Educação

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

Eu, Tiago José Teixeira Borges, no presente ano letivo 2016-2017, encontro-me a realizar um estudo de investigação intitulado "Aprendizagem dos números irracionais: um estudo com alunos do 8º ano", no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Este estudo tem como principal objetivo contribuir para promover, de uma forma efetiva, a aprendizagem dos Números Irracionais na disciplina de Matemática.

Para a concretização deste trabalho necessito recolher dados durante as aulas que irei lecionar no 2º período, sob a orientação do Professor Paulo Alvega, na turma do(a) seu (sua) educando(a).

A recolha de dados incluirá as produções escritas dos alunos na realização de tarefas propostas em sala de aula bem como a gravação áudio e vídeo das interações geradas neste contexto e a realização de entrevistas. Os dados recolhidos serão usados exclusivamente para a concretização deste trabalho e em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato do(a) seu (sua) educando(a).

Da participação neste trabalho não resultará qualquer prejuízo para o(a) aluno(a), podendo, pelo contrário, trazer-lhe benefícios na compreensão da matemática.

Para o efeito, solicito a sua autorização para a recolha de dados do(a) seu (sua) educando(a), e manifesto inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Agradeço antecipadamente a sua colaboração e atenção dispensada.

Com os melhores cumprimentos,

_________________________	_____________________________
Tiago Borges	Paulo Alvega

Autorização

Autorizo o(a) meu (minha) educando(a) _______________________________ nº ___ da turma ___ do 8º Ano de escolaridade a participar no estudo acima referido e a recolha de dados a realizar no seu âmbito.

___ de ___________________ de 2017

O/A Encarregado/a de Educação

____

Anexo 2 – Planos de aula

Plano de Aula 1

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO PLANO DE AULA ANO LETIVO 2016-2017	AEQB AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Data e Hora	13 de março de 2017 das 9h15m às 10h05m	
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais	
Tópicos, Noções e Conceitos	• Representação decimal e fracionária de um número racional • Representação decimal de um número irracional	
Sumário	Resolução de uma ficha de trabalho acerca dos diferentes tipos de dízimas: revisão das dízimas finitas e infinitas periódicas e introdução do conceito de dízima infinita não periódica.	
Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Explorar a representação decimal e fracionária de número racional. **2.** Reconhecer a existência de um novo tipo de dízima (infinita não periódica). **3.** Reconhecer a ineficácia do uso da calculadora na identificação de dízimas infinitas periódicas e de números racionais.	
Capacidades Transversais	• Estabelecimento de conexões • Comunicação matemática	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Dízima finita • Dízima infinita periódica • Número racional • Fração decimal	
Recursos	**Professor**	Planificação da aula
	Alunos	Ficha de trabalho e material de escrita
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.	

METODOLOGIA DE TRABALHO
O professor anunciará aos alunos que realizarão uma ficha de trabalho acerca dos números racionais. O professor distribuirá a tarefa por mesa, pedirá aos alunos para resolverem autonomamente a pares e informá-los-á do tempo para a resolver. Em cada mesa serão entregues dois enunciados da tarefa, um dos enunciados contendo a resolução de cada par será entregue ao professor antes da discussão da tarefa no âmbito do estudo em curso. Depois, proceder-se-á à discussão coletiva dessas questões. Será pedido a um aluno para

responder oralmente à alínea 1.1. e após apresentar a sua resposta, serão esclarecidas eventuais dúvidas. O professor utilizará este processo para a discussão das alíneas 1.2. e 2.2. Será pedido a um aluno para resolver a alínea 2.1. no quadro e após apresentar a sua resolução, serão esclarecidas eventuais dúvidas. O professor utilizará este processo para a discussão da questão 3. Para a discussão da questão 4, o professor resolvê-la-á no quadro com a assistência, interpelando-os até ser apresentada uma resolução correta e que os alunos concordem com ela.

Realizar-se-á a sistematização de ideias no final da discussão das questões 2 e 4.

MOMENTOS DA AULA	
(1) Início da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	9h15m - 9h20m
(2) Apresentação da ficha de trabalho.	9h20m - 9h25m
(3) Trabalho autónomo dos alunos.	9h25m - 9h45m
(4) Discussão da tarefa com a turma e sistematização de ideias.	9h45m - 10h05m

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(1) Início da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro. — 9h15m - 9h20m

(2) Apresentação da ficha de trabalho. — 9h20m - 9h25m

Serão distribuídos dois enunciados da ficha de trabalho acerca dos números racionais por mesa.

O professor informará os alunos que uma das resoluções da ficha será entregue antes da discussão da tarefa, do tempo para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.

(3) Trabalho autónomo dos alunos. — 9h25m - 9h45m

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que resolverão as questões da tarefa durante a discussão. O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, com eventuais dificuldades.

Resolução da alínea 1.1.:

> Como o denominador não é um produto de potências de bases 2 e 5, então a fração não é decimal, logo a fração não se pode representar por uma dízima finita.

Notas quanto à resolução: uma outra justificação correta para esta questão é afirmar que a fração não é equivalente a uma fração cujo denominador seja um múltiplo de 10.

Dificuldades previstas: não se preveem dificuldades por parte dos alunos em reconhecerem que o número apresentado não pode ser representado por uma dízima finita, mas sim em apresentarem uma justificação.

Prevê-se que os alunos não recordem que uma fração tem de ser decimal para que a dízima seja finita. Caso um aluno tente justificar que o número não pode ser representado por uma dízima finita por a fração não ser decimal, prevê-se que o aluno tenha dificuldades em justificar porque é que a fração não é decimal.

Também se prevê que alguns alunos recorram à calculadora cuja visualização não permitirá concluir que a dízima é infinita periódica e assim concluam que a dízima seja finita. Logo, os alunos usarão a visualização da calculadora como argumento, o que é insuficiente.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: caso o aluno não saiba identificar uma dízima finita com base na representação em fração, o professor pedirá ao aluno para que forneça exemplos de dízimas finitas. O professor pedirá ao aluno para que acrescente mais casas decimais aos novos exemplos de dízima finita que ele forneça. O professor pedirá ao aluno como se escrevem essas dízimas em fração, não prevendo dificuldades. O professor perguntará então ao aluno o que os denominadores têm em comum e prevê que o aluno saiba responder que são potências de base 10. O professor perguntará ao aluno como se chamam as frações com expoentes deste tipo, prevendo que ele responda frações decimais. O professor voltará a perguntar ao aluno se a fração é representada por uma dízima finita e prevê que ele responda negativamente, argumentando que 19 não pode ser escrito numa potência de base 10 ou que a fração não é decimal. Para garantir que o aluno apresente uma definição completa e correta de fração decimal, o professor perguntará ao aluno se um quarto é uma fração decimal. O professor prevê que o aluno responda negativamente, por o denominador dessa fração não ser um múltiplo de 10, e então perguntará ao aluno se consegue converter a fração um quarto numa fração cujo denominador seja múltiplo de 10. Caso o aluno não consiga, o professor perguntará ao aluno a que dízima corresponde um quarto, donde prevê que o aluno responda corretamente 0,25. Depois o professor pedirá ao aluno para que a converta em fração, donde prevê que o aluno converta corretamente para vinte e cinco e cem avos e conclua que as suas frações são equivalentes. O professor prevê que o aluno conclua que uma fração decimal é uma fração cujo denominador é um múltiplo de 10 ou equivalente a uma fração cujo denominador é um múltiplo de 10.

Caso o aluno recorra à justificação de que a fração não é decimal, mas não sabe explicar, o professor pedirá ao aluno que forneça exemplos de frações decimais. Caso o aluno apresente exemplos corretos, o professor recorrerá ao processo anteriormente descrito aquando de estabelecer uma relação entre os denominadores das frações decimais. Caso o aluno não saiba apresentar exemplos, o professor recorrerá ao processo anteriormente descrito desde o início.

Caso o aluno utilize a visualização da calculadora como argumento, o professor perguntará ao aluno se a dízima não tem mais casas decimais do que as visualizadas na calculadora. Prevê-se que o aluno responda que não há forma de saber e aí o professor perguntará ao aluno se a visualização na calculadora é suficiente para concluir que a dízima é finita. O professor prevê que o aluno responda que não, e o professor orientará então o aluno com o processo descrito anteriormente para chegar à resolução apresentada.

Resolução da alínea 1.2.:

$$\frac{13}{19} = 0{,}6842105253 \ldots$$

O número é representado por uma dízima infinita periódica porque está representada em forma de fração e não é finita.

Dificuldades previstas: não se preveem dificuldades por parte dos alunos em obter um valor aproximado da fração, mas prevê-se que os alunos mostrem dificuldades na justificação.

Prevê-se que os alunos afirmem que a dízima não é periódica com base na representação decimal apresentada na calculadora.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará ao aluno o motivo pelo qual não considera a dízima periódica. Prevê-se que o aluno invoque a representação decimal apresentada na calculadora e aí o professor perguntar-lhe-á que tipo de dízimas conhece. Prevê-se que o aluno responda dízimas finitas e infinitas periódicas. Aí, o professor perguntará ao aluno se já tinha feito alguma conclusão acerca da representação decimal da fração. Prevê-se que o aluno recorde a resolução da alínea 1.1. e conclua que como a fração não pode ser representado por uma dízima finita, então tem de ser uma dízima periódica. Para garantir que o aluno apresente uma definição correta e completa de dízima infinita periódica, o professor perguntar-lhe-á se não aprendeu a representar dízimas infinitas periódicas diferentes da forma decimal. Prevê-se que o aluno responda em números fracionários, note que está perante um número fracionário e como referiu que o número não pode ser representado por uma dízima finita na alínea anterior, conclua que tem de ser por uma dízima infinita periódica.

Resolução da alínea 2.1.:

$0{,}121221222122221222221\ldots$

Dificuldades previstas: não se preveem dificuldades por parte dos alunos em apresentar a nova dízima, pois prevê-se que eles saibam identificar a lei de formação da dízima.

Resolução da alínea 2.2.:

Esta dízima não é periódica, pois não existe repetição de nenhuma sequência de números na mesma disposição.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos identifiquem a dízima como periódica por acharem que a construção da dízima segue uma lei específica de formação.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: prevendo que o aluno afirme que a dízima é periódica por seguir uma lei específica de formação, o professor perguntará então ao aluno o que faz de uma dízima periódica. O professor prevê que o aluno apresente uma definição semelhante a: "é uma dízima com uma sequência infinita de números em que a partir de um número se repetem os anteriores na mesma disposição". Aí, o professor perguntará ao aluno se haverá alguma repetição de números na mesma disposição e caso responda afirmativamente, então qual o período. Prevê-se, no entanto, que o aluno reconheça que não existe nenhuma repetição de números na mesma disposição e conclua que a dízima não é periódica.

Resolução da alínea 3:

Dois exemplos de números representados na forma de dízima que não sejam números racionais são:

0,101001000100001…

0,44544554455545555…

No primeiro exemplo, a seguir a cada algarismo 1, acrescenta-se mais um algarismo 0, e no segundo exemplo, a seguir a cada 44, acrescenta-se mais um algarismo 5 logo não há uma sequência infinita de números em que a partir de um número se repetem os anteriores na mesma disposição.

Notas quanto à resolução: sendo esta questão uma tarefa de exploração prevê-se que sejam apresentadas diversas respostas diferentes da exemplificada acima. No entanto, também se podem apresentar dízimas infinitas não periódicas que sigam uma lei específica de formação diferente da apresentada na questão 2. Um exemplo pode ser a dízima 0,1234567891011121314… em que os números que constituem a dízima são consecutivos.

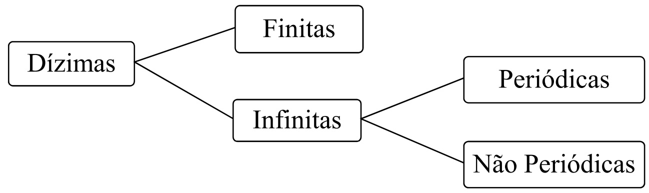
Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos demonstrem dificuldades em relacionar o número racional com os diferentes tipos de dízima.

Caso o aluno saiba a relação entre número racional e os diferentes tipos de dízima e tente produzir dízimas semelhantes à da questão 2, o professor não prevê dificuldades da parte do aluno ou em justificar porquê.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: caso o aluno não produza dízimas semelhantes à da questão 2, o professor perguntará ao aluno como deve ser a dízima. O professor prevê que o aluno responda que a dízima tem de ser infinita e não pode ser periódica. O professor pedirá ao aluno para que ele explicite o conceito de dízima que não é periódica. O professor prevê que o aluno responda que não há período, que não existe nenhuma sequência infinita de números em que a partir de um número se repetem os anteriores na mesma disposição, ou resposta semelhante. O professor então orientará o aluno para que ele conclua que a dízima não se pode repetir e que ele tem de produzir uma dízima que respeite uma lei de formação que garanta que a dízima não se repita. Esta última parte serve principalmente para garantir que o aluno saiba que para a construção da dízima infinita não periódica, não pode escrever uma sequência de números à toa, mas sim uma sequência que obedeça a uma lei específica que assegure que não há repetição de um número ou de um grupo de números.

Resolução da alínea 4:

Um esquema que resuma os tipos de dízima estudados pode ser:



Notas quanto à resolução: sendo esta questão uma tarefa de exploração prevê-se que sejam apresentadas diversas respostas diferentes da exemplificada acima a nível de estética, mas semelhantes quanto ao conteúdo.

Dificuldades previstas: não se preveem dificuldades por parte dos alunos em reconhecerem que existem três tipos de dízimas e que as dízimas se dividem em dois tipos: finitas e infinitas. Também se prevê que os alunos não tenham dificuldades em construir um esquema semelhante ao apresentado com os retângulos “Dízimas”, “Finitas” e “Infinitas”. Prevê-se que os alunos mostrem dificuldades em nomear o novo tipo de dízima e relacioná-lo com os retângulos já apresentados.

Ações do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará como caraterizaria o novo tipo de dízima. O professor prevê que o aluno reconheça que a dízima não é finita, logo é infinita. O professor perguntará então ao aluno o que pode dizer da dízima infinita que já dispõe, prevendo que responda que tem é periódica, ou que tem um período. Depois, o professor perguntará ao aluno o que pode afirmar sobre o novo tipo de dízima que ficou a conhecer, prevendo que responda que não tem período, logo não é periódica, concluindo assim que é uma dízima infinita não periódica.

(4) Discussão da tarefa com a turma.

9h45m - 10h05m

O professor selecionará um aluno que responda à alínea 1.1. oralmente.

A seleção deste aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as respostas dos alunos. Caso tenha havido uma resposta dominante, o professor selecionará um aluno que a tenha adotado para a apresentar.

Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi dito pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta do colega, o professor pedirá ao aluno que respondeu inicialmente para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

Relativamente ao processo de seleção do aluno e discussão da alínea 1.1., o professor repeti-lo-á para a discussão da alínea 1.2.

Concluído o esclarecimento de dúvidas, o professor pedirá aos alunos para redirigirem a sua atenção para a alínea 1.2., especificamente para o valor aproximado da fração apresentada: 0,6842105263. O professor recordará aos alunos que foi este o valor que obtiveram na calculadora e perguntará porque é que esta dízima não é finita, visto que foi dito que era infinita periódica. O professor prevê que alguns alunos respondam que "é um valor aproximado" ou "a calculadora arredondou", e então pedirá aos alunos para dividirem 6842105263 por 10000000000. Os alunos obterão o mesmo valor decimal e o professor perguntará então aos alunos porque é que a fração $\frac{6842105263}{10000000000}$ é finita e $\frac{13}{19}$ não é. Prevê-se que os alunos recorram às justificações que foram apresentadas na resolução das alíneas 1.1. e 1.2. e aí o professor perguntará aos alunos em que se devem basear para averiguar se uma dízima é finita ou infinita não periódica. O professor prevê que os alunos digam através da representação em forma de fração. Depois o professor perguntará aos alunos o que podem concluir acerca do papel da calculadora na identificação de dízimas, prevendo que os alunos respondam que pode não ser a ferramenta mais eficaz.

O professor pedirá a um aluno que vá ao quadro resolver a alínea 2.1.
A seleção deste aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as estratégias de resolução dos alunos. Caso tenha havido uma estratégia de resolução dominante, adotada por todos os alunos, o professor selecionará um que tenha apresentado uma resolução deste tipo. Caso algum aluno apresente uma estratégia alternativa à estratégia dominante, o professor selecioná-lo-á para também apresentar a sua resolução. Após cada aluno concluir a sua resolução, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resolução apresentada no quadro, o professor pedirá ao aluno que tinha vindo ao quadro para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

Para a discussão da alínea 2.2., o professor utilizará o processo de seleção do aluno e de discussão adotado para a discussão da alínea 1.1. Para a questão 3, o professor utilizará o processo que adotou na alínea 2.1. para escolher dois alunos para apresentarem as suas respetivas resoluções.

Para a discussão da questão 4, o professor resolvê-la-á no quadro com a assistência dos alunos. O professor perguntará a um aluno como começaria por classificar as dízimas, prevendo que ele responda em finitas e infinitas. Como o professor prevê que uma grande parte dos alunos tenha feito esta divisão, a escolha do aluno será aleatória. Depois, o professor pedirá a outro aluno para que explique o que fez a seguir no seu esquema, prevendo que responda que dividiu as dízimas infinitas em periódicas e não periódicas. A escolha deste aluno foi feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as respostas dos alunos. Caso tenha havido uma resposta dominante, o professor selecionará um aluno que a tenha adotado para a apresentar. Depois de cada aluno apresentar a sua

resposta, o professor perguntará aos restantes se concordam com o que foi dito pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta do colega, o professor pedirá ao aluno que respondeu inicialmente para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.	

NOTAS
Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto.

Plano de Aula 2

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO PLANO DE AULA ANO LETIVO 2016-2017	AEQB AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Data e Hora	16 de março de 2017 das 10h25m às 12h15m
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais
Tópicos, Noções e Conceitos	• Números irracionais sob diferentes representações. • Número real. • Conjunto dos números reais.
Sumário	Conclusão da correção da ficha de trabalho da aula anterior. Resolução de uma ficha de trabalho acerca da irracionalidade das raízes quadradas. Número irracional, número real e conjunto dos números reais.
Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Reconhecer que para a raiz quadrada de um número ser um número racional, o primeiro tem de ser um quadrado perfeito. **2.** Reconhecer que a raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito é uma dízima infinita não periódica. **3.** Reconhecer que um número que é representado por uma dízima infinita não periódica não pode ser escrito na forma de fração. **4.** Reconhecer que todo o número que não é racional é irracional. **5.** Reconhecer que todo o número irracional é representado por uma dízima infinita não periódica. **6.** Reconhecer o número irracional sob diferentes representações. **7.** Saber que um número real é um número inteiro ou um número que pode ser representado por uma dízima finita ou infinita. **8.** Reconhecer a existência de um novo conjunto: o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. **9.** Saber que $\mathbb{R}$ é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Capacidades Transversais	• Raciocínio matemático • Estabelecimento de conexões • Comunicação matemática
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Dízima finita • Dízima infinita periódica • Dízima infinita não periódica • Número racional • Número irracional • Teorema de Pitágoras • Quadrado perfeito • Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$
Recursos	**Professor**: Planificação da aula **Alunos**: Ficha de trabalho e material de escrita
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.

METODOLOGIA DE TRABALHO

O professor anunciará aos alunos que será feita a conclusão da discussão da tarefa e da sistematização de ideias da aula anterior que decorreu a 13 de março de 2017.

Depois, o professor anunciará aos alunos que realizarão uma nova ficha de trabalho na continuação do estudo das dízimas e dos números racionais.

O professor distribuirá a tarefa por mesa, pedirá aos alunos para resolverem autonomamente a pares e informá-los-á do tempo para os resolver. Em cada mesa serão entregues dois enunciados da tarefa, um dos enunciados contendo a resolução de cada par será entregue ao professor antes da discussão da tarefa no âmbito do estudo em curso.

Depois, proceder-se-á à discussão coletiva da tarefa.

MOMENTOS DA AULA

(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Conclusão da discussão da tarefa e sistematização de ideias da aula anterior.	10h30m - 10h50m
(3) Apresentação da nova ficha de trabalho.	10h50m - 11h00m
(4) Trabalho autónomo dos alunos.	11h00m - 11h15m
(5) Início do 2º tempo da aula: entrada dos alunos.	11h25m - 11h30m
(6) Continuação do trabalho autónomo dos alunos.	11h30m - 11h45m
(7) Discussão da tarefa com a turma e sistematização de ideias.	11h45m - 12h15m

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m

(2) Conclusão da discussão da tarefa e sistematização de ideias da aula anterior. A discussão da tarefa da aula anterior e a sistematização de ideias serão feitas de acordo com o estabelecido no plano da aula anterior.	10h30m - 10h50m
(3) Apresentação da nova ficha de trabalho. O professor anunciará aos alunos que farão uma ficha de trabalho que visa a continuação do estudo de novos números e distribui-las-á pela turma. Depois pedirá a um aluno para que leia a Nota Histórica 1 até à parte em que se fala do número irracional. O professor recordará aos alunos que já conheciam os números racionais, assim como o conceito de número racional, e informá-los-á da existência de um novo tipo de números, que são os números irracionais, e do seu conceito. O professor depois perguntará aos alunos se têm dúvidas. Se algum aluno tiver dúvidas, o professor pedirá a um outro aluno para que ajude ou esclareça o colega e caso este não fique esclarecido, o professor intervirá. Pretende-se assim que os alunos reconheçam que um número ou é racional ou é irracional. O professor pedirá a um outro aluno para que leia o resto da Nota Histórica 1 e de forma a garantir que todos os alunos perceberam que a raiz quadrada de um número natural ou é um número inteiro ou é uma dízima infinita não periódica, o professor repetirá esta parte para os alunos. O professor depois perguntará aos alunos se têm dúvidas. Se algum aluno tiver dúvidas, o professor pedirá a um outro aluno para que esclareça o colega e caso este não esteja esclarecido, o professor intervirá. Pretende-se assim que os alunos reconheçam que a raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito se representa por uma dízima infinita não periódica. O professor informará os alunos do tempo para resolver a ficha e da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.	10h50m - 11h00m
(4) Trabalho autónomo dos alunos. O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que apresentarão as respostas às questões. O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, com eventuais dificuldades. **Resolução da alínea 1.1.:** Os números racionais são: $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$, porque são números inteiros que constituem números racionais. Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam estabelecer a relação entre os números apresentados e o conceito de número racional. Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos se é possível escrever os números $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$ de outra	11h00m - 11h15m

forma, prevendo que ele responda 1,2 e 3. O professor perguntará aos alunos o que é um número racional. Se um dos alunos responder que é uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica, o professor perguntar-lhes-á se existe outra forma de escrever um número racional, prevendo que um deles responda que um número racional pode ser escrito na forma de fração. O professor perguntará então aos alunos se um número inteiro se pode escrever na forma de fração, prevendo que um deles responda afirmativamente, concluindo que os números $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$ são números racionais.

Resolução da alínea 1.2.:

A raiz quadrada de um número natural é racional quando o primeiro é um quadrado perfeito.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam definir uma estratégia para resolver esta alínea.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor pedirá aos alunos para que volte a focar no trabalho que realizou na alínea 2.1. e tente encontrar uma relação entre os números que identificou como racionais. O professor prevê que os alunos identifiquem os números 1, 4 e 9 como quadrados perfeitos e estabeleça uma regra semelhante àquela que foi apresentada como resolução da alínea 2.2.

Resolução da alínea 2.1.:

a) Verdadeira.

b) Falsa, porque 0,5 é racional e não é um número inteiro.

c) Falsa, porque se uma dízima for infinita não periódica então não é um número racional.

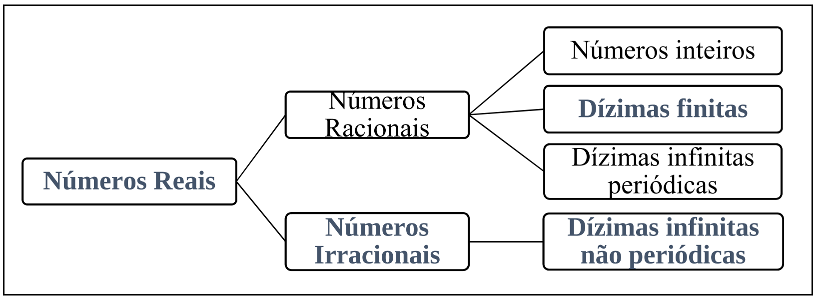
d) Falsa, porque um número real pode não ser racional, mas sim irracional, como o π.

Dificuldades previstas: não se preveem dificuldades por parte dos alunos na apresentação de uma resposta para as alíneas a) e b). Prevê-se que alguns alunos tenham dificuldades na alínea c) por não conseguirem estabelecer a relação entre os tipos de dízimas e a irracionalidade de um número. Também se prevê que alguns alunos tenham dificuldades na alínea d) por ainda não estarem muito familiarizados com a noção de número real.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: em relação à alínea c), o professor perguntará aos alunos os tipos de dízimas que conhece, prevendo que um deles responda finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas. O professor depois perguntará aos alunos o que foi dito acerca dos números racionais e as dízimas durante a discussão da tarefa da aula de 13 de março. O professor prevê que um dos alunos responda que as dízimas finitas e as dízimas infinitas periódicas representam números racionais. O professor perguntará então aos alunos o que podem concluir sobre as dízimas infinitas não periódicas, prevendo que um deles responda que representam números irracionais, concluindo que existem dízimas que não são números racionais.

Em relação à alínea d), o professor perguntará aos alunos o que entendem como número real, prevendo que um deles apresente uma resposta semelhante a "*é qualquer número*." Então, o professor perguntará aos alunos se conhecem algum número que não é racional, prevendo que um deles apresente um exemplo de um número que não é racional e que ambos concluem que nem todo o número real é racional.

Resolução da alínea 2.2.:



Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos tenham dificuldades em estabelecer as relações entre os tipos de números e de dízimas.

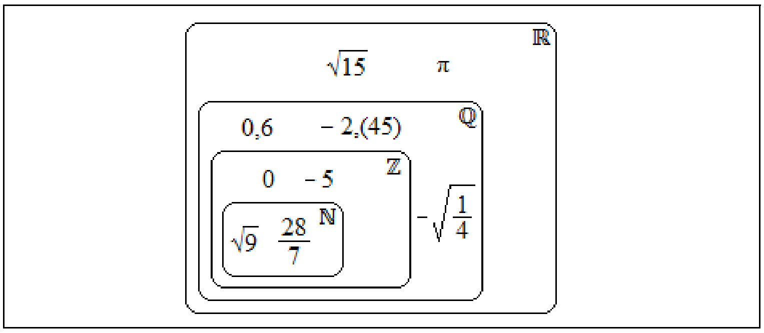
Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor começará por perguntar aos alunos como se pode representar os números racionais e prevê que entre as representações dadas, os alunos sejam capazes de identificar que as dízimas finitas são a representação em falta.

O professor perguntará aos alunos que outros números existem para além dos números racionais. O professor prevê que os alunos mostrem dificuldades em apresentar uma resposta e pedir-lhes-á para que recordem o que leram na Nota Histórica 1, prevendo que eles respondam que existem os números irracionais.

Depois, o professor perguntará aos alunos se não ficaram a conhecer um outro tipo de números. Caso os alunos não apresentem uma resposta, o professor pedir-lhes-á para que releiam a Nota Histórica 2, prevendo que um deles responda os números reais. O professor perguntará então aos alunos quais são os números reais, prevendo que apresentem uma resposta semelhante a "*são todos os números.*" O professor perguntará então aos alunos se todos esses números incluem os racionais e os irracionais, prevendo que um deles responda afirmativamente e que saibam preencher os retângulos referentes aos números irracionais e aos números reais.

O professor depois pedirá aos alunos para que olhem para as diferentes representações para os números racionais e pensem numa possível resposta para o retângulo ainda em branco, prevendo que um deles responda dízimas infinitas não periódicas.

Resolução da Questão 3:



Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam interpretar a relação apresentada entre os conjuntos ℕ, ℤ, ℚ e ℝ, assim como colocar alguns dos números nos conjuntos apropriados.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: em relação à identificação dos conjuntos, o professor perguntará aos alunos para que identifiquem cada um, prevendo que apenas tenha dificuldades em identificar ℝ. Para assistir os alunos, o professor perguntar-lhes-á que números pertencem a este conjunto, remetendo-os para a Nota Histórica 2 caso seja necessário. O professor prevê que um deles responda os números racionais e irracionais, e que concluam que ℝ corresponde ao retângulo maior.

Em relação à inserção dos números nos conjuntos, o professor prevê que os alunos mostrem dificuldades quanto à inserção do número –2,(45). O professor perguntará ao aluno como classificaria este número, prevendo que responda que é uma dízima infinita periódica. O professor perguntará então ao aluno que tipo de número é se pode representar por esse tipo de dízima, prevendo que responda que é um número racional, concluindo que é no retângulo correspondente a ℚ que se deve inserir o número $-2,(45)$.

O professor também prevê que o número $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ seja alvo de dificuldades por parte dos alunos e o professor perguntará ao aluno como interpreta esse número, prevendo que responda que procura a raiz quadrada de um quarto. O professor depois orientará o aluno para que ele compreenda que procura então o número que elevado ao quadrado seja igual a um quarto, prevendo que é um meio e que como tem um sinal de menos à frente, então o número apresentado corresponde a menos um meio, prevendo que o aluno conclua que $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ pertence ao conjunto ℚ.

(5) Início do 2º tempo da aula: entrada dos alunos. 11h25m - 11h30m

(6) Continuação do trabalho autónomo dos alunos. 11h30m - 11h45m

O trabalho autónomo dos alunos neste momento decorrerá sob as mesmas condições que o trabalho autónomo anterior.

(7) Discussão da tarefa com a turma e sistematização de ideias. 11h45m - 12h15m

Na resolução da alínea 1.1., será pedido a um aluno que responda oralmente. Como se prevê que haja uma resposta comum entre todos os alunos, a seleção deste aluno será aleatória. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi dito ou se têm uma resposta diferente ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada, o professor pedirá ao aluno que tinha respondido para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações, o aluno não ficar esclarecido com a explicação do colega, o professor intervirá.

Para a alínea 1.2., prevê-se que os alunos apresentem respostas semelhantes, mas com usos distintos da linguagem matemática. Portanto, serão selecionados alunos, no máximo dois, que apresentem respostas completas e corretas, e que possam contribuir para a aprendizagem dos colegas a nível de linguagem matemática. A seleção destes alunos é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as estratégias de resolução dos alunos. Após cada aluno concluir a sua resolução no quadro, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelo colega ou se têm alguma dúvida. O processo de esclarecimento de dúvidas será semelhante àquele que foi descrito para a alínea 1.1.

Finda a discussão, pretende-se que os alunos reconheçam que a raiz quadrada de um quadrado perfeito é um número racional e a de um número natural que não é um quadrado perfeito é um número irracional e uma dízima infinita não periódica.

Para cada subalínea da alínea 2.1., o professor selecionará um aluno para apresentar a sua resposta oralmente. A seleção deste aluno e o processo de esclarecimento de dúvidas serão os mesmos que adotados nas alíneas 1.2.

Para a alínea 2.2., se o professor notou durante o momento de aula anterior que houve um grau de dificuldade reduzido por parte dos alunos na resolução desta alínea, o professor selecionará um aluno para completar o esquema no quadro cujo aquele que está no enunciado já tinha sido previamente desenhado pelo professor. A seleção do aluno será feita ao acaso. Caso tenha havido muitas dificuldades num grande número de alunos, o professor resolverá esta alínea no quadro interpelando os alunos que tiveram dificuldades a ajudá-lo a completar o esquema. Caso algum dos outros alunos discorde de cada resposta que é dada, o professor dar-lhe-á oportunidade para se manifestar. Após esse aluno se manifestar, o professor perguntará ao primeiro aluno que tinha respondido se concorda. Caso concorde, o professor perguntará ao resto da turma se também concorda e escrever-se-á essa resposta no quadro. Caso algum dos outros alunos tenha dúvidas, o professor pedirá ao aluno que tinha apresentado a resposta para esclarecer o colega. Após ser apresentada a resolução no quadro, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno ainda tenha dúvidas, o professor pedirá à turma se alguém pode explicá-la. Se o aluno não ficar esclarecido, o professor intervirá.

Para a questão 3, o professor desenhará o esquema no quadro e escreverá os números no quadro. Para a alínea 3.1., o professor pedirá a um aluno para que identifique cada conjunto com o respetivo símbolo e para a alínea 3.2., o professor pedirá a um aluno para que escolha um dos números do enunciado e o insira no conjunto correto. A seleção do aluno em qualquer das situações referidas será feita aleatoriamente. Após a apresentação da resolução da questão, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi apresentado ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resolução apresentada, o professor pedirá ao aluno que tinha ido ao quadro para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá. Pretende-se assim que os alunos saibam que um número real é um número inteiro ou um número que pode ser representado por uma dízima finita ou infinita, que reconheçam a existência de um novo conjunto: o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, e que saibam que $\mathbb{R}$ é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Para a discussão de qualquer uma das alíneas, o professor pedirá a alunos que tenham apresentado respostas erradas ou dúvidas durante o trabalho autónomo que possam contribuir para as aprendizagens dos alunos, maximizar os seus conhecimentos acerca dos números irracionais e evitar que cometam erros frequentes no futuro.

NOTAS

Prevê-se que a aula decorra como previsto perante os objetivos e os momentos definidos, mas caso sobre tempo, será entregue uma tarefa, a tarefa "*Os números reais*", que visa a consolidação dos conhecimentos dos alunos sobre as várias representações dos números reais, a sua natureza e os conjuntos de números.

Plano de Aula 3

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO
PLANO DE AULA
ANO LETIVO 2016-2017

Data e Hora	20 de março de 2017 das 9h15m às 10h05m
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais
Tópicos, Noções e Conceitos	• Números reais sob diferentes representações. • Conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$
Sumário	Resolução de uma ficha de trabalho acerca das diferentes representações de números reais e dos conjuntos numéricos. Conclusão da discussão da ficha de trabalho da aula anterior.

Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Saber identificar a natureza de um número sob diferentes representações. **2.** Saber interpretar o diagrama de Venn quando usado para estabelecer a relação entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. **3.** Reconhecer que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Capacidades Transversais	• Estabelecimento de conexões • Comunicação matemática • Interpretação de problemas
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Dízima infinita periódica • Número racional • Número irracional • Número real • Quadrado perfeito • Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$
Recursos	**Professor**: Planificação da aula **Alunos**: Ficha de trabalho e material de escrita
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.

METODOLOGIA DE TRABALHO

O professor anunciará aos alunos que realizarão uma ficha de trabalho acerca dos números reais e os conjuntos numéricos.

O professor distribuirá a tarefa por mesa, pedirá aos alunos para resolverem autonomamente a pares e informá-los-á do tempo para os resolver. Em cada mesa serão entregues dois enunciados da tarefa, um dos enunciados contendo a resolução de cada par será entregue ao professor antes da discussão da tarefa no âmbito do estudo em curso. Depois, proceder-se-á à discussão da tarefa.

Terminada a discussão da tarefa, o professor retomará a discussão da última alínea da tarefa da aula anterior com o objetivo de esclarecer os alunos quanto à colocação dos números nos conjuntos corretos e à interpretação do esquema do enunciado.

MOMENTOS DA AULA

(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	9h15m - 9h20m
(2) Apresentação da ficha de trabalho.	9h20m - 9h25m
(3) Trabalho autónomo dos alunos.	9h25m - 9h40m
(4) Discussão da tarefa com a turma.	9h40m - 9h55m
(5) Conclusão da discussão da tarefa da aula anterior.	9h55m - 10h00m
(6) Entrega dos testes de avaliação.	10h00m - 10h05m

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	9h15m – 9h20m
(2) Apresentação da ficha de trabalho.	9h20m - 9h25m

O professor anunciará aos alunos que farão uma ficha de trabalho que visa a consolidação da noção de número real, passando pela revisão dos números naturais, inteiros e racionais, e distribui-las-á pela turma.

O professor informará os alunos que não poderão utilizar a calculadora durante a resolução da ficha, do tempo para a resolver e da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.

(3) Trabalho autónomo dos alunos. — 9h25m - 9h40m

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que apresentarão respostas diante da turma.

O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, com eventuais dificuldades.

Resolução:

Tabela do Carlos

	$\frac{\sqrt{36}}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\frac{800}{100}$	12,68(9)	$\sqrt{\frac{1}{16}}$
$\mathbb{N}$	X				
$\mathbb{Z}$	X		X		
$\mathbb{Q}$	X		X	X	X
$\mathbb{R}$	X	X	X	X	X

$\frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = 2$ é um número natural, logo pertence a $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

$-\frac{800}{100} = -8$ é um número inteiro negativo, portanto pertence a $\mathbb{Z}$, logo também pertence a $\mathbb{Q}$.

Tabela da Filipa

	$\frac{\sqrt{36}}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\frac{800}{100}$	12,68(9)	$\sqrt{\frac{1}{16}}$
$\mathbb{N}$	X				
$\mathbb{Z}$	X		X		
$\mathbb{Q}$	X	X	X	X	X
$\mathbb{R}$	X	X	X	X	X

Como 5 não é um quadrado perfeito, a raiz de um número natural que não é um quadrado perfeito não é um número racional, logo $\sqrt{5}$ apenas pertence a $\mathbb{R}$.

12,68(9) é uma dízima finita periódica, logo é um número racional, portanto pertence a $\mathbb{Q}$.

$\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$, que é um número racional, logo pertence a $\mathbb{Q}$.

Notas quanto à resolução: o professor prevê que alguns alunos classifiquem alguns dos números quanto à sua natureza com base na representação inicial, sem tentando ver se é possível escrever alguns desses números sob outra representação.

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos mostrem dificuldades em identificar a natureza dos números com base nas suas representações, principalmente $\frac{\sqrt{36}}{3}$, $-\frac{800}{100}$ e $\sqrt{\frac{1}{16}}$.

Também se prevê que os alunos mostrem dificuldades em identificar a que conjunto, ou conjuntos, cada número pertence, tenha ou não tenha arranjado forma de o escrever com outra representação. Estas dificuldades podem-se dever à falta de conhecimentos prévios dos alunos, como identificar os conjuntos numéricos apresentados e os números que lhes pertencem.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos:

→ Em relação ao número $\frac{\sqrt{36}}{3}$, o professor perguntará aos alunos se conseguem escrevê-lo de outra forma. Prevê-se que os alunos calculem a raiz de 36, obtendo o valor 6 e depois façam a divisão de 6 por 3, obtendo assim o valor 2. O professor perguntará então aos alunos a que conjunto pertence o número 2, prevendo que um deles responda a $\mathbb{N}$, e depois o professor perguntar-lhes-á se pertence apenas ao conjunto $\mathbb{N}$. O professor prevê que os alunos concluam que também pertence aos restantes conjuntos. Caso os alunos não consigam fazer esta última conclusão, o professor perguntará aos alunos o que representa $\mathbb{Z}$, prevendo que um deles responda o conjunto dos números inteiros e aí, o professor perguntar-lhes-á se 2 é um número inteiro, prevendo que eles respondam afirmativamente e assim concluam que 2 também pertence a $\mathbb{Z}$.

→ Em relação ao número $-\frac{800}{100}$, prevê-se que alguns alunos não percebam que corresponde ao número – 8 e afirmem que não corresponde a um número inteiro, mas apenas a um número fracionário. O professor pedirá então aos alunos se não conseguem escrevê-lo de outra forma e caso não saibam, o professor pedir-lhes-á para efetuarem a divisão. Ao obterem o valor – 8, o professor prevê que os alunos concluam que se trata de um número inteiro e que pertence a $\mathbb{Z}$. Caso os alunos não saibam identificar este número como um que pertence a $\mathbb{Q}$, o professor perguntará aos alunos quais os números que pertencem a este conjunto, prevendo que eles respondam os números racionais. O professor pedirá então aos alunos para que recordem o que são números racionais e prevê que eles concluam que como são números que se podem escrever na forma de fração e que o número $-\frac{800}{100}$ pertence ao conjunto dos números racionais.

→ Em relação ao número $\sqrt{\frac{1}{16}}$, o professor perguntará aos alunos se são

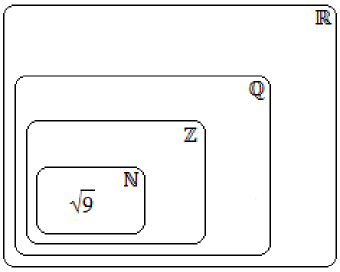
capazes de o escrever número de outra forma. Prevê-se que os alunos tentem efetuar as operações apresentadas, ou seja, tentem calcular a raiz quadrada de um dezasseis avos, mas que ainda continuem a mostrar dificuldades. O professor depois orientará os alunos para que eles compreendam que procuram então o número que elevado ao quadrado seja igual a um dezasseis avos, prevendo que um deles responda que é um quarto. Caso os alunos ainda não consigam apresentar uma resposta, o professor perguntar-lhes-á qual a raiz quadrada de 16, prevendo que um deles responda 4 e aí o professor perguntará aos dois alunos a raiz quadrada de um dezasseis avos, prevendo que um dos alunos responda um quarto, fazendo a conexão entre os números 16 e 4 e os seus respetivos inversos. O professor perguntará depois aos alunos como classificariam o número obtido, prevendo que um deles responda que é um número fracionário, concluindo assim que este número pertence ao conjunto $\mathbb{Q}$.	
(4) Discussão da tarefa com a turma e sistematização de ideias. Na resolução da tarefa serão projetadas as tabelas no quadro, o professor perguntará a um aluno para que apresente um dos erros que encontrou na primeira tabela e depois escrevê-lo-á no quadro. O professor também escreverá no quadro as justificações e outras informações que possam ser úteis para uma melhor compreensão por parte dos alunos da resolução da tarefa. Este processo será repetido para a deteção de erros na segunda tabela, escrevendo todas as justificações e outras informações úteis que não tenham surgido na análise da primeira tabela. A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as estratégias de resolução dos alunos. O professor escolherá um aluno que tenha identificado corretamente a que conjunto, ou conjuntos, um dado número pertence. Na decisão de que conjunto, ou conjuntos, um número pertence, se todos os alunos apresentaram uma justificação semelhante, então a escolha do aluno será aleatória. Caso tenha havido justificações corretas, mas distintas, o professor escolherá um aluno que tinha apresentado uma justificação menos completa de modo a garantir o maior envolvimento dos alunos que conseguem apresentar uma resposta mais completa e que o primeiro aluno também se envolva no processo de esclarecimento das suas próprias dúvidas. Para cada número, o professor apresentará respostas erradas ou dúvidas que tenha observado durante o trabalho autónomo e que possam contribuir para as aprendizagens dos alunos, maximizar os seus conhecimentos acerca dos números irracionais e evitar que cometam erros frequentes no futuro. O professor perguntará aos alunos por que motivo essas respostas estão erradas, escolhendo um aluno que possa fornecer uma resposta correta e completa. Este aluno será escolhido com base na resolução que tenha feito durante o trabalho autónomo e o seu nível de participação na discussão da tarefa. Este processo também será utilizado para a seleção do aluno que esclarecerá as dúvidas que tenham surgido no trabalho autónomo e sido colocadas pelo professor neste momento de aula.	9h40m - 9h55m

Após a apresentação da resposta de cada aluno, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi apresentado ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resolução apresentada ou apresente dúvidas, o professor pedirá ao aluno que tinha ido ao quadro para a explicar; caso o primeiro não tenha ficado esclarecido, o professor perguntará à turma se alguém esclarece o colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

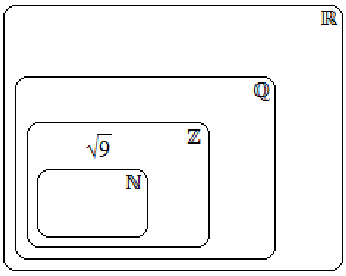
Terminada a discussão da tarefa, o professor projetará a tabela sem erros.

(5) Conclusão da discussão da tarefa da aula anterior. 9h55m - 10h00m

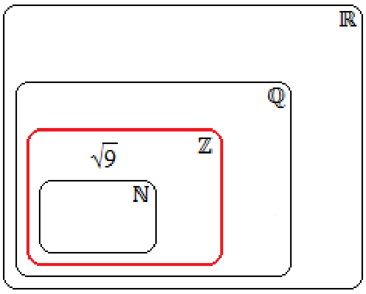
De modo a garantir que os alunos interpretem corretamente o diagrama de Venn quando utilizado para estabelecer a relação entre os conjuntos numéricos, o professor desenhará o esquema utilizado na última questão da tarefa da aula anterior. O professor depois inserirá o número $\sqrt{9}$ no conjunto indicado visto que foi essa a conclusão feita durante a discussão da tarefa.



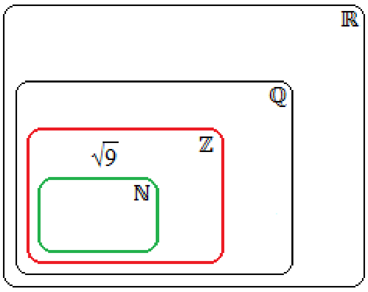
O professor perguntará depois aos alunos se o número $\sqrt{9}$ não podia ser colocado noutra zona do diagrama, originando o esquema apresentado abaixo:



Prevê-se que alguns alunos respondam que o número $\sqrt{9}$ está bem inserido por crerem que como o $\sqrt{9}$ é um número inteiro, pode ser colocado em qualquer zona do interior do retângulo identificado como o conjunto dos números inteiros. Caso um aluno discorde desta resposta, o professor dar-lhe-á oportunidade para se manifestar e depois perguntará aos alunos se concordam com o colega disse. Caso os alunos não estejam esclarecidos com o professor intervirá. O professor perguntará aos alunos para identificarem $\mathbb{Z}$, prevendo que os alunos identifiquem como o conjunto dos números inteiros, mas caso esta resposta seja a única apresentada, o professor pedirá exemplos de modo a garantir que os alunos reconheçam que $\mathbb{Z}$ reúne os números inteiros positivos e negativos, para além do número zero. De modo a garantir esta compreensão por parte dos alunos, o professor escreverá o conjunto {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …} no quadro. O professor depois assinalará o conjunto dos números inteiros, como apresentado abaixo:



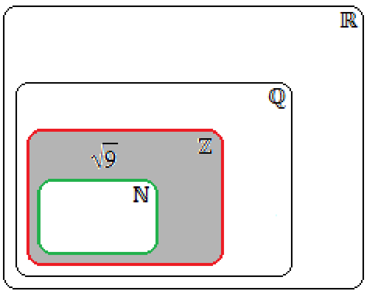
Depois, o professor perguntará aos alunos para identificarem ℕ, prevendo que todos os alunos o identifiquem como o conjunto dos números naturais e depois o professor destacá-lo-á como apresentado abaixo:



Depois o professor perguntará aos alunos quais os números naturais no conjunto apresentado, prevendo que todos os alunos respondam 1, 2, 3, etc., e aí o professor assinalará esses números no conjunto:

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

O professor perguntará depois aos alunos se o retângulo que está identificado como ℕ corresponde aos números assinalados, então quais são os números que pertencem à restante zona do retângulo identificado como ℤ. Essa zona está identificada a sombreado no esquema seguinte.



O professor prevê que os alunos respondam que são os números negativos e o número zero e concluam assim que $\sqrt{9}$ tem que estar inserido no retângulo identificando como ℕ, e não dentro do retângulo identificado como ℤ e ao mesmo tempo fora do retângulo identificado como ℕ.

O professor depois definirá o conjunto ℕ por extensão e pedirá aos alunos para o considerarem, assim como o ℤ:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

O professor perguntará aos alunos se notam alguma semelhança, prevendo que todos os alunos verifiquem que os números que pertencem a $\mathbb{N}$, pertencem a $\mathbb{Z}$. O professor depois perguntará aos alunos se conseguem estabelecer alguma relação entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, prevendo que verifiquem que $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$. O professor depois escreverá no quadro essa afirmação através de linguagem matemática, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. O professor depois perguntará se os alunos conseguem estabelecer alguma relação entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, prevendo que respondam que o conjunto $\mathbb{Z}$ está contido em $\mathbb{Q}$. O professor depois perguntará se os alunos conseguem estabelecer alguma relação entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, prevendo que respondam que o conjunto $\mathbb{Q}$ está contido em $\mathbb{R}$, e concluam assim que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.	
(6) Entrega dos testes de avaliação.	10h00m - 10h05m
Neste momento, serão entregues os testes de avaliação dos alunos.	

NOTAS
Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto.

Plano de Aula 4

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO PLANO DE AULA ANO LETIVO 2016-2017	AEQB AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Data e Hora	23 de março de 2017 das 10h25m às 12h15m
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais
Tópicos, Noções e Conceitos	• Números irracionais • Reta real • Representação de números irracionais na reta real
Sumário	Resolução de uma ficha de trabalho acerca dos números reais e dos conjuntos numéricos. Resolução de duas fichas de trabalho acerca da representação de números irracionais na reta real.
Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Reconhecer a existência de números irracionais na reta real. **2.** Reconhecer que entre dois números reais existe uma infinidade de números reais. **3.** Saber utilizar o Teorema de Pitágoras para construir geometricamente raízes de números naturais e representá-los na reta real. **4.** Saber localizar na reta real o simétrico de um número irracional, feita a construção geométrica deste.
Capacidades	• Raciocínio matemático • Estabelecimento de conexões

Transversais	• Comunicação matemática	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Raio da circunferência • Teorema de Pitágoras • Simétrico de um número	
Recursos	**Professor**	Planificação da aula e *software* GeoGebra
	Alunos	Fichas de trabalho, material de escrita e compasso
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.	

METODOLOGIA DE TRABALHO

O professor apresentará a ficha de trabalho intitulada *Números reais e conjuntos*. O professor pedirá aos alunos para resolverem a ficha autonomamente a pares e informá-los-á do tempo que têm para a resolver. Em cada mesa serão entregues dois enunciados da tarefa, um dos enunciados contendo a resolução de cada par será entregue ao professor antes da discussão da tarefa no âmbito do estudo em curso. Depois, proceder-se-á à discussão da tarefa.

Nesta aula, será abordada a representação geométrica de números irracionais a partir de duas fichas de trabalho: a primeira intitulada *Números irracionais e a reta real* e a segunda *Construindo números irracionais na reta real*. Após o professor apresentar cada ficha, os alunos resolvê-las-ão segundo o mesmo método de trabalho que adotaram para trabalharem a tarefa *Números reais e conjuntos* e também serão informados do tempo para resolver cada uma. Também serão entregues dois enunciados pelos motivos apresentados atrás.

Após cada momento do trabalho autónomo dos alunos de cada tarefa, seguir-se-á a sua discussão. Para a discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real*, recorrer-se-á ao *software* GeoGebra.

MOMENTOS DA AULA

(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Entrega da tarefa *Números reais e conjuntos* e trabalho autónomo dos alunos.	10h30m - 10h40m
(3) Discussão da tarefa *Números reais e conjuntos* com a turma.	10h40m - 10h50m
(4) Apresentação da tarefa *Números irracionais e a reta real*.	10h50m - 10h55m
(5) Trabalho autónomo dos alunos.	10h55m - 11h15m
(6) Início do 2º tempo da aula: entrada dos alunos.	11h25m - 11h30m
(7) Discussão da tarefa *Números irracionais e a reta real* com a turma.	11h30m - 11h50m
(8) Apresentação da tarefa *Construindo números irracionais na reta real*.	11h50m - 11h55m
(9) Trabalho autónomo dos alunos.	11h55m - 12h05m
(10) Discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real* com a turma.	12h05m - 12h15m

DESENVOLVIMENTO DA AULA	
(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Entrega da tarefa *Números reais e conjuntos* e trabalho autónomo dos alunos.	10h30m - 10h40m

Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada "*Números reais e conjuntos*" que permitirá aos alunos consolidarem os seus conhecimentos sobre os números reais e os conjuntos numéricos.

O professor informará os alunos do tempo para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que apresentarão as respostas durante a discussão.

O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, com eventuais dificuldades.

Resolução da Questão 1:

$5 \in \mathbb{Z}$	$\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$	$\sqrt{11} \notin \mathbb{Q}$
$5 \in \mathbb{R}$	$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{11} \in \mathbb{R}$
$-\sqrt{16} \notin \mathbb{N}$	$-5,(89) \in \mathbb{Q}$	$1,3(5) \notin \mathbb{Z}$
$-\sqrt{16} \in \mathbb{Z}$	$-5,(89) \in \mathbb{R}$	$1,3(5) \in \mathbb{Q}$

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam estabelecer a relação entre o número apresentado e o conjunto numérico que eles têm que ver se esse número pertence ou não.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: para a situação que os alunos tenham dificuldades o professor perguntar-lhes-á quais os números que constituem o conjunto numérico que têm. Depois perguntará aos alunos se o número que têm corresponde aos números que afirmaram que constituíam o conjunto da alínea. Caso não consigam responder, o professor pedirá aos alunos para que deem exemplos de números que fazem parte desse conjunto e que depois comparem com o número que têm. O professor também optará, caso necessário, por recordar aos alunos o trabalho que realizaram na resolução de tarefas das aulas anteriores, em que se abordaram os números irracionais.

Resolução da Questão 2:

$\mathbb{N} \underline{\subset} \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{Z} \underline{\not\subset} \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{Q} \underline{\not\subset} \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \underline{\subset} \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{Q} \underline{\subset} \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R} \underline{\not\subset} \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \underline{\subset} \mathbb{Z} \underline{\subset} \mathbb{Q} \underline{\subset} \mathbb{R}$

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos mostrem dificuldades em relacionar os conjuntos numéricos através dos símbolos $\subset$ e $\not\subset$.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor averiguará se os alunos conhecem o significado dos símbolos $\subset$ e $\not\subset$. Caso não conheçam, o professor apresentará aos alunos: $\subset$ significa "está contido em" e $\not\subset$ significa "não está contido em". Depois, o professor perguntará aos alunos o que significa "um conjunto estar contido noutro", prevendo que um dos alunos responda que todos os números do primeiro pertencem ao segundo, e que depois sejam capazes de resolver a questão.

(3) Discussão da tarefa *Números reais e conjuntos* com a turma. — 10h40m - 10h50m

Para a discussão da questão 1, o professor selecionará um aluno que responda oralmente se um número pertence ou não ao conjunto que tem. A seleção deste aluno basear-se-á no seguinte: os alunos da turma receberam na aula anterior o teste de avaliação que realizaram e o professor selecionará para responder os alunos que apresentaram resultados abaixo da classificação positiva de modo a garantir que eles saibam classificar números reais quanto à sua natureza e compreendam a relação entre os conjuntos numéricos. Caso nenhum destes alunos seja capaz de apresentar uma resposta, o professor pedirá aos restantes para o fazer. Em relação aos alunos que tiveram classificação negativa no teste de avaliação, o professor pedirá a alguns para justificarem as suas respostas de modo a garantir que eles saibam classificar números reais quanto à sua natureza e compreendam a relação entre os conjuntos numéricos.

Depois de ser ouvida a resposta do aluno, o professor perguntará aos restantes se concordam com o que o colega disse ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta do colega, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará aos restantes alunos que tiveram classificação negativa no teste de avaliação se alguém se oferece para a tirar ao colega. Caso nenhum consiga, o professor dirigir-se-á a toda a turma para que alguém esclareça o colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

O professor repetirá o processo de seleção do aluno e o de esclarecimento de dúvidas para a discussão da questão 2.

(4) Apresentação da tarefa *Números irracionais e a reta real*. — 10h50m - 10h55m

Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada "*Números irracionais e a reta real*" que permitirá aos alunos explorarem conteúdos geométricos que permitam a representação na reta real de raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos.

O professor informará os alunos do tempo para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.

(5) Trabalho autónomo dos alunos.

10h55m - 11h15m

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que apresentarão as respostas às questões durante a discussão.

O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, com eventuais dificuldades.

Resolução da alínea a):

O raio da 1ª circunferência é igual ao comprimento de [OB].

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

O raio da 1ª circunferência é $\sqrt{5}$.

O raio da 2ª circunferência é igual ao comprimento de [OC].

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 6 \Rightarrow h = \sqrt{6}$$

O raio da 2ª circunferência é $\sqrt{6}$.

O raio da 3ª circunferência é igual ao comprimento de [OD].

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h^2 = (\sqrt{6})^2 + 2^2 \Leftrightarrow h^2 = 10 \Rightarrow h = \sqrt{10}$$

O raio da 3ª circunferência é $\sqrt{10}$.

Notas quanto à resolução: a resolução desta questão é única e corresponde à que é apresentada anteriormente.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam estabelecer a relação entre o raio da circunferência e a hipotenusa do triângulo retângulo.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos para que se foquem na circunferência menor e agirá da seguinte maneira para os diferentes tipos de dúvidas que possam surgir de modo a que possa responder às dificuldades de todos os alunos e assim intervir junto de cada mesa:

→ Caso não disponham de uma estratégia, o professor pedirá aos alunos para que identifiquem o raio da circunferência. O professor prevê que um dos alunos indique o segmento [$OT1$] e depois o professor perguntará aos alunos se conseguem identificar outro segmento que constitua o raio da circunferência, prevendo que um deles responda o segmento [OB]. O professor depois pedirá aos alunos que relacionem esse segmento com o triângulo [OAB]. O professor prevê que um dos alunos responda que é um dos lados do triângulo e aí perguntará aos alunos se não se trata de um lado específico do triângulo.

→ Caso os alunos não consigam identificar o lado [*OB*] como a hipotenusa do triângulo [*OAB*], o professor perguntará aos alunos como classificariam o triângulo [*OAB*] quanto aos ângulos, prevendo que um deles responda retângulo. O professor perguntará aos alunos como se chama o lado [*OB*], prevendo que um dos alunos responda que se trata da hipotenusa. Aí, o professor perguntará aos alunos como podem determinar a hipotenusa de um triângulo retângulo.

→ Caso os alunos não consigam determinar a hipotenusa do triângulo [*OAB*], o professor perguntará aos alunos se conhecem os comprimentos dos catetos, prevendo que um deles responda afirmativamente, e depois perguntar-lhes-á se não conhecem nenhuma forma de determinar a hipotenusa de um triângulo quando se sabe os catetos, prevendo que um deles responda através do Teorema de Pitágoras. O professor prevê então que os alunos usem o Teorema de Pitágoras para calcular o comprimento de [*OB*] e concluam assim que o raio da 1ª circunferência é $\sqrt{5}$.

→ Após determinarem o raio da 1ª circunferência, o professor prevê que os alunos não consigam repetir o processo para a 2ª, por não conseguirem reconhecer que o lado [*OB*] é o cateto do triângulo [*OBC*]. O professor perguntará então aos alunos se já não tinham utilizado o lado [*OB*] para obter o raio da 1ª circunferência. O professor prevê que um dos alunos responda que o lado [*OB*] é a hipotenusa do triângulo [*OAB*], cujo comprimento é igual a $\sqrt{5}$ e, portanto, conclua que o cateto [*OB*] mede $\sqrt{5}$. Conhecidos os comprimentos dos dois catetos do triângulo [*OBC*], o professor prevê que os alunos consigam determinar o raio da 2ª circunferência.

Resolução da alínea b):

As abcissas dos pontos T1, T2 e T3 são iguais aos raios da 1ª, 2ª e 3ª circunferência, respetivamente, portanto a abcissa de T1 é $\sqrt{5}$, a abcissa de T2 é $\sqrt{6}$ e a abcissa de T3 é $\sqrt{10}$.

Notas quanto à resolução: tendo em conta o caráter exploratório desta alínea, o professor prevê que sejam apresentadas respostas diferentes da exemplificada acima. O professor prevê que alguns alunos escrevam que as abcissas dos pontos T1, T2 e T3 são iguais aos raios das circunferências, assim como prevê que outros alunos escrevam os valores das abcissas, ambas respostas corretas. Outra resposta que possa surgir é: as abcissas dos pontos T1, T2 e T3 são iguais aos comprimentos das hipotenusas dos triângulos [*OAB*], [*OBC*] e [*OCD*].

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não compreendam a pergunta e mostrem assim dificuldades em apresentar alguma caraterística das abcissas dos pontos T1, T2 e T3.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: tendo em conta o que é pedido nas alíneas seguintes a esta, o professor orientará os alunos para que apresentem uma resposta semelhante à destacada, não excluindo outra resposta igualmente correta se os alunos estiverem a caminhar em direção a essa resposta.

O professor perguntará aos alunos como determinam o valor da abcissa do ponto T1, prevendo que um dos alunos responda que têm de saber o comprimento do segmento $[OT1]$ e aí o professor perguntará aos alunos se conseguem estabelecer alguma relação entre segmento e a 1ª circunferência. O professor prevê que um dos alunos responda que o segmento $[OT1]$ corresponde ao raio da 1ª circunferência e conclua assim que a abcissa do ponto T1 é igual ao raio da 1ª circunferência. O professor perguntará aos alunos o que podem concluir acerca das abcissas dos pontos T2 e T3, prevendo que respondam que são iguais aos raios das respetivas circunferências a que pertencem.

Resolução da alínea c):

> As abcissas dos pontos S1, S2 e S3 são iguais a $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$ e $-\sqrt{10}$, respetivamente, porque na reta os pontos assinalados como S1, S2 e S3 correspondem aos simétricos de T1, T2 e T3, respetivamente.

Notas quanto à resolução: a resolução desta questão é única e corresponde à que é apresentada anteriormente.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos mostrem dificuldades em apresentar as abcissas de S1, S2 e S3 por não terem ainda obtido as abcissas dos pontos T1, T2 e T3.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor recorrerá ao método utilizado para apoiar os alunos com eventuais dificuldades na alínea b) para que obtenham as abcissas dos pontos T1, T2 e T3. Caso os alunos não consigam relacionar os pontos S1, S2 e S3 com os pontos T1, T2 e T3, o professor perguntará aos alunos como determinam o valor da abcissa do ponto S1, prevendo que um dos alunos responda que têm de saber o comprimento do segmento $[OS1]$ e aí o professor perguntará aos alunos se conseguem estabelecer alguma relação entre segmento e a 1ª circunferência. O professor prevê que um dos alunos responda que o segmento $[OS1]$ corresponde ao raio da 1ª circunferência e conclua assim que a abcissa do ponto S1 é igual ao raio da 1ª circunferência. O professor aí perguntará aos alunos qual a abcissa de S1 e caso eles digam que é a mesma de T1, o professor pedirá aos alunos para que olhem para as posições de S1 e T1 e também para a origem da reta. O professor prevê aí que os alunos notem que a abcissa de S1 está à esquerda da origem, concluindo que tem de ser negativa e, portanto, que é $-\sqrt{5}$. O professor prevê que os alunos consigam repetir este processo para S2 e S3.

Resolução da alínea d):

Ponto	Cateto Maior	Cateto Menor	Hipotenusa	Abcissa do Ponto
T1	2	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
…	…	…	…	…
T2	$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$
…	…	…	…	…
T3	$\sqrt{6}$	2	$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$
…	…	…	…	…
T4	3	2	$\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$
…	…	…	…	…
T5	4	1	$\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$

T4: $h^2 = 3^2 + 2^2 \Leftrightarrow h^2 = 13 \Rightarrow h = \sqrt{13}$

T5: $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 1^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

Notas quanto à resolução: a resolução desta questão é única e corresponde à que é apresentada anteriormente.

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos tenham dificuldades em adotar uma estratégia para preencher as linhas correspondentes aos pontos T4 e T5.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor pedirá aos alunos que olhem para o que escreveram nas linhas correspondentes aos pontos T1, T2 e T3 e que recordem o trabalho que fizeram na alínea a) para acharem esses valores. O professor prevê que os alunos recordem o uso do Teorema de Pitágoras e que o apliquem corretamente para preencher as restantes linhas.

Resolução da alínea e):

A afirmação é verdadeira, porque se selecionarmos as abcissas de dois dos pontos da tabela $\sqrt{5}$ = 2,236067… e $\sqrt{6}$ = 2,449489…, verificamos que existem infinitos números racionais: 2,24; 2,241; 2,2411; 2,4111, etc.

Notas quanto à resolução: tendo em conta o caráter exploratório desta alínea, o professor prevê que sejam apresentadas respostas diferentes da exemplificada acima.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam apresentar uma resposta tendo em conta o caráter exploratório.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor pedirá aos alunos para que olhem para a figura apresentada no início da questão, especificamente para a zona da reta real entre os pontos T1 e T2. Depois, o professor perguntará aos alunos o que se encontra nessa zona, prevendo que um dos alunos responda pontos. Aí, o professor perguntará aos alunos quantos pontos, prevendo que um deles responda uma infinidade de pontos, ou uma resposta semelhante. A seguir, o professor perguntará aos alunos quais os números que identificam esses pontos, prevendo que um deles

responda números irracionais. O professor perguntará por que não racionais, e caso o aluno não conclua que os pontos também podem ser identificados por números racionais, o professor perguntará aos alunos se conseguem obter valores para $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$, prevendo que recorram à calculadora e consigam obter valores arredondados desses números. O professor perguntará então aos alunos se não conseguem indicar um número racional que esteja entre $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$, prevendo que um deles o consiga fazer. Caso não consigam, o professor perguntará aos alunos para recordarem a noção de número racional e depois repetirá a questão anterior a esta. O professor prevê assim que os alunos reconheçam que os vários pontos que estão entre T1 e T2 são identificados por números reais.	
(6) Início do 2º tempo da aula: entrada dos alunos.	11h25m - 11h30m
(7) Discussão da tarefa *Números irracionais e a reta real*. O professor projetará a figura da tarefa no quadro e para a alínea a), pedirá a um aluno para que apresente a sua resolução para obter a abcissa do ponto T1. Prevê-se que tenha sido adotada uma estratégia dominante pelos alunos, que foi o uso do Teorema de Pitágoras. Como também se prevê que todos os alunos tenham utilizado esta estratégia, com ou sem o apoio do professor, de modo este garantir que os alunos resolvessem a segunda página da tarefa, a seleção dos alunos será aleatória. Após o aluno concluir a sua resolução, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resolução apresentada no quadro, o professor pedirá ao aluno que a apresentou no quadro para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá. Para as abcissas dos restantes pontos, o professor perguntará a um aluno ao acaso para indicar os comprimentos dos catetos, da hipotenusa do triângulo seguinte e da abcissa do ponto T2, e escrevê-los-á no quadro. Caso surjam dúvidas, o professor repetirá o processo de esclarecimento descrito anteriormente. Para a determinação da abcissa do ponto T3, o professor adotará o processo de discussão utilizado para a determinação da abcissa do ponto T2. Para a alínea b), o professor pedirá a um aluno que responda oralmente. A seleção deste aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as respostas dos alunos. Caso tenha havido uma resposta dominante, o professor selecionará um aluno que a tenha adotado para a apresentar. Caso tenha havido respostas entre os alunos que estejam corretas e que permitam aos alunos reconhecer outras caraterísticas da própria figura do enunciado da tarefa, o professor dará oportunidade para esses alunos se manifestarem. O processo para esclarecer um aluno que discorde de uma resposta ou tenha dúvidas será o mesmo que adotado na alínea a). Para a alínea c), o professor pedirá a um aluno que responda oralmente. O professor prevê que tenha sido apresentada uma resposta dominante pelos alunos, portanto a seleção do aluno para a apresentação da resposta será	11h30m - 11h50m

aleatória. O processo de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado nas alíneas anteriores.

Para a alínea d), o professor projetará a tabela no quadro, selecionará um aluno ao acaso e pedir-lhe-á que forneça os dados para uma determinada linha e preenchê-la-á. Quando o professor preencher todas as linhas, perguntará aos alunos se concordam com o que foi feito no quadro ou se têm alguma dúvida. O processo para esclarecer um aluno que discorde da resolução ou tenha dúvidas será o mesmo que adotado nas alíneas anteriores.

Para a alínea e), o professor pedirá a um aluno, ou mais, que responda oralmente. O professor terá observado as respostas apresentadas pelos alunos durante o trabalho autónomo e selecionará um aluno que possa apresentar uma resposta correta e permita aos alunos refletir sobre a sua veracidade e se existe forma de completar mais a resposta ou até apresentar uma justificação diferente, correta e completa. Pretende-se que seja obtida uma resposta o mais completa e consensual possível entre a turma. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi dito ou se têm uma resposta diferente ou se têm alguma dúvida. O processo para esclarecer um aluno que discorde da resposta ou tenha dúvidas será o mesmo que adotado nas alíneas anteriores.

(8) Apresentação da tarefa *Construindo números irracionais na reta real*. 11h50m - 11h55m

Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada "*Construindo números irracionais na reta real*" que aborda a construção de raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos e que permite aos alunos explorarem essas construções, baseando-se no trabalho realizado na tarefa anterior.

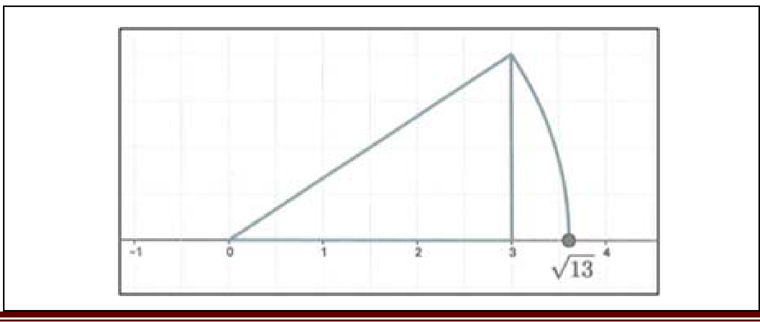
O professor informará os alunos do tempo para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.

(9) Trabalho autónomo dos alunos. 11h55m - 12h05m

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que apresentarão as respostas às questões durante a discussão.

O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, com eventuais dificuldades.

Resolução da alínea a):



Notas quanto à resolução: a resolução desta questão é única e corresponde à que é apresentada anteriormente.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam definir uma estratégia de resolução para esta alínea.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos se já tinham visto raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos na reta real. O professor prevê que um deles responda afirmativamente e que recorde os pontos T1, T2 e T3 do enunciado da tarefa *Números irracionais e a reta real*. Aí, o professor perguntará aos alunos como determinaram as abcissas desses números, prevendo que um deles responda que tiveram de determinar o raio da circunferência. O professor perguntará aos alunos como determinaram o raio, prevendo que um deles responda através do Teorema de Pitágoras. O professor perguntará aos alunos porquê o Teorema de Pitágoras, prevendo que um deles responda porque havia um triângulo retângulo. Aí, o professor perguntará aos alunos se conseguem obter um triângulo retângulo para representar $\sqrt{13}$ e direcionar-lhos-á para tabela que preencheram na tarefa *Números irracionais e a reta real*, prevendo que eles consigam representar o número $\sqrt{13}$ na reta real.

Resolução da alínea a1):

Este triângulo não é o único que se pode utilizar, pois também se pode utilizar o triângulo de base 2 e altura 3.

Notas quanto à resolução: tendo em conta o caráter exploratório desta alínea, o professor prevê que sejam apresentadas respostas diferentes da exemplificada acima. Prevê-se que alguns alunos digam que pode ser qualquer triângulo cuja hipotenusa meça $\sqrt{13}$, que uns alunos apresentem um triângulo com dimensões que são números irracionais, que outros alunos tentem desenhar alguns triângulos na figura, entre outras. O importante é que o aluno compreenda que tem de ser um triângulo retângulo cujas dimensões sejam possíveis de traçar.

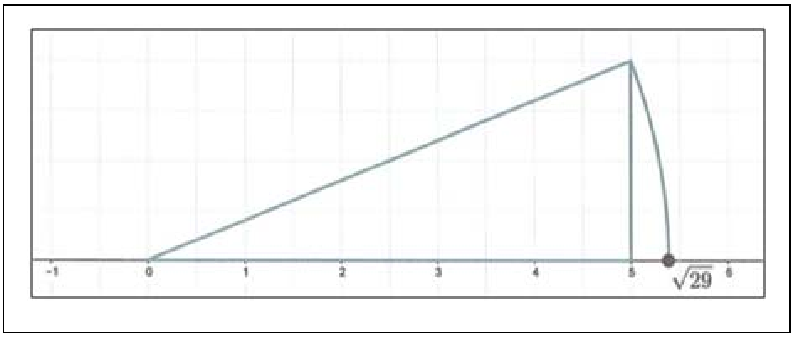
Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos mostrem dificuldades em definir uma estratégia de resolução para esta alínea.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos porque é que usaram o triângulo que desenharam na alínea a). O professor prevê que um deles responda porque a hipotenusa mede $\sqrt{13}$ e aí o professor perguntar-lhes-á se não há outro triângulo cuja hipotenusa tenha esse comprimento. Caso os alunos não apresentem nenhuma conclusão, o professor perguntar-lhes-á os comprimentos dos catetos, o comprimento da hipotenusa que obtiveram e depois perguntar-lhes-á se não há outros catetos que farão com que a hipotenusa meça $\sqrt{13}$. O professor prevê assim que eles concluam que em vez de traçar um triângulo retângulo de base 3 e altura 2, pode-se traçar um retângulo de base 2 e altura 3.

Caso os alunos apresentem um triângulo retângulo cuja hipotenusa meça

$\sqrt{13}$, mas os comprimentos possuam valores correspondentes a números irracionais, o professor perguntar-lhes-á como é que traçarão os catetos de um triângulo retângulo com esses comprimentos. O professor prevê que os alunos respondam que não é possível, pois não sabem o valor exato desses comprimentos, ou uma resposta semelhante.

Resolução da alínea b):

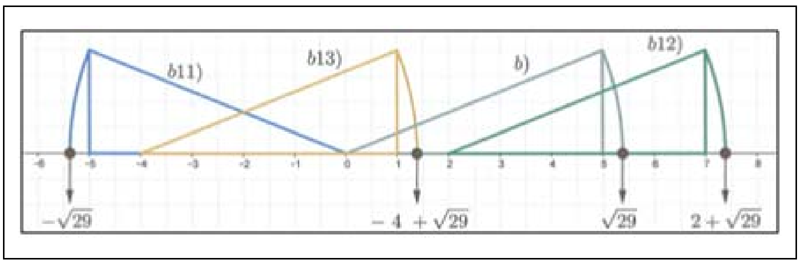


Notas quanto à resolução: os alunos podem não apresentar um triângulo igual a este, visto que existem outros triângulos retângulos cuja hipotenusa meça $\sqrt{29}$ e seja possível traçar. Caso os alunos tenham compreendido a resolução da alínea a1), então os alunos são capazes de apresentar um triângulo diferente deste e é bastante provável que os alunos o tentem apresentar.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos tenham dificuldades em obter um triângulo retângulo para fazer a representação de $\sqrt{29}$ na reta real.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos o que precisam para representar o número $\sqrt{29}$, prevendo que um deles responda de um triângulo retângulo. O professor perguntará aos alunos se existe alguma relação entre os lados do triângulo e o número $\sqrt{29}$, prevendo que um deles responda que a hipotenusa medirá $\sqrt{29}$. O professor prevê que os alunos concluam que só faltam os comprimentos dos catetos e aí o professor pedirá aos alunos para que apresentem um valor aproximado do número $\sqrt{29}$. O professor prevê que os alunos apresentem 5,38…, depois pedir-lhes-á para localizarem o $\sqrt{29}$ na reta real, prevendo que o localizem entre os pontos de abcissas 5 e 6. Aí, o professor perguntará aos alunos se têm alguma ideia de quanto poderá medir o cateto que constitui a base do triângulo, prevendo que um deles responda 5. O professor pedirá então aos alunos para que explorem os valores possíveis para os catetos se um deles medirá no máximo 5.

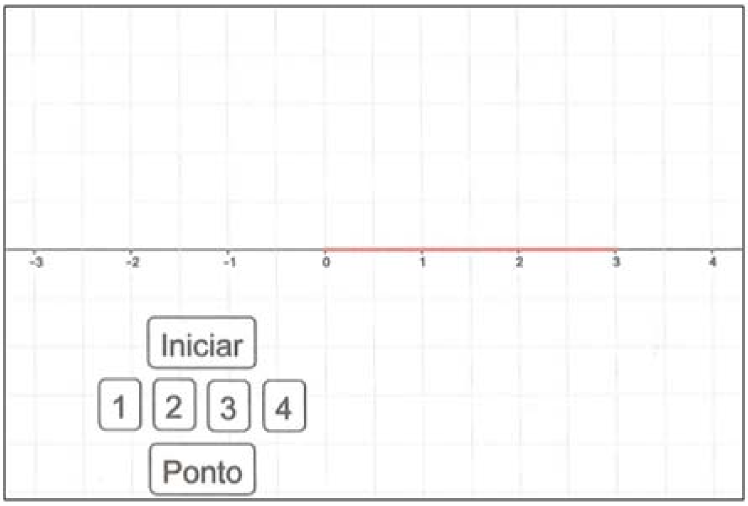
Resolução da alínea b1):



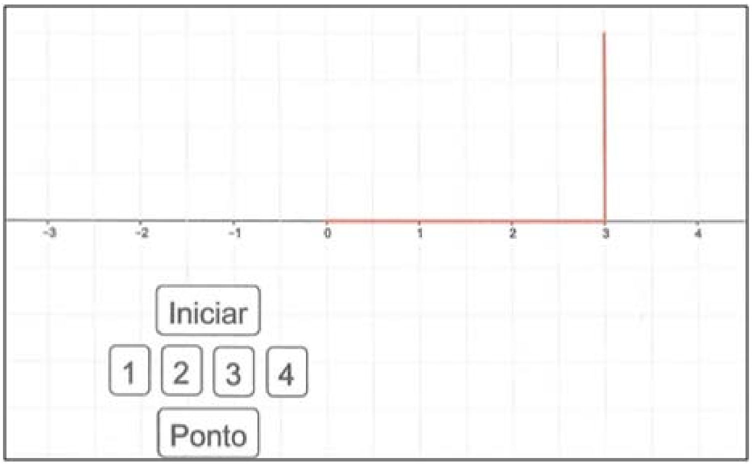
Notas quanto à resolução: os alunos podem não apresentar triângulos iguais aos que estão na resolução apresentada. Na representação do número $-\sqrt{29}$, os alunos também podem dispensar o uso de um triângulo retângulo e traçar a semicircunferência cujo centro é a origem do referencial, iniciando-a no ponto de abcissa $\sqrt{29}$ e terminando-a no de abcissa $-\sqrt{29}$. Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos tenham dificuldades em representar alguns dos números pedidos. Ação do professor face às dificuldades dos alunos: Em relação ao número $-\sqrt{29}$, o professor perguntará aos alunos se têm alguma ideia onde este número se vai localizar na reta real, prevendo que um deles responda entre os pontos de abcissa – 5 e – 6. O professor perguntará depois aos alunos a que distância da origem da reta real esse ponto se encontra, prevendo que um deles responda $\sqrt{29}$, e aí o professor perguntará aos alunos se o ponto com abcissa $\sqrt{29}$ também se encontra a essa distância da origem da reta, prevendo que um deles responda afirmativamente. O professor perguntará então aos alunos como podem representar $-\sqrt{29}$ na reta real, prevendo que um deles responda usando o triângulo construído na alínea b), fazendo uma simetria de reflexão em relação à reta $x = 0$ (não utilizando necessariamente esta linguagem). Em relação ao número $2+\sqrt{29}$, o professor pedirá aos alunos para que indiquem o ponto de abcissa 2, prevendo que ambos o façam corretamente, e depois perguntará aos alunos onde se localiza o ponto de abcissa $2+\sqrt{29}$, prevendo que um deles responda que é necessário mover a base do triângulo construído na alínea b) até que esta se situe entre os pontos de abcissa 2 e 7. O professor perguntará então aos alunos como se pode utilizar o triângulo construído na alínea b) para representar o número $2+\sqrt{29}$, prevendo que um deles responda que tem se efetuar uma translação do triângulo construído na alínea b) segundo o vetor de coordenadas (2,0) (não utilizando necessariamente esta linguagem). Caso os alunos estejam esclarecidos quanto à representação do $2+\sqrt{29}$ na reta real, não se prevê que os alunos tenham dificuldades em repetir o processo para o número $-4+\sqrt{29}$.	
(10) Discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real*. O professor projetará a figura da tarefa no quadro e pedirá a alguns alunos para que respondam oralmente como procederam na representação do número $\sqrt{13}$. Como se prevê que todos os alunos tenham conseguido fazer esta alínea durante o trabalho autónomo, a seleção dos alunos será aleatória, dando prioridade aos alunos que mostraram dificuldades no trabalho autónomo. À medida que cada aluno anuncia cada passo a tomar na construção geométrica, o professor produzirá os resultados desses passos no esquema segundo a orientação do aluno recorrendo ao *software* GeoGebra. Esses passos são os seguintes e entre os parênteses estão os nomes dos	12h05m - 12h15m

botões que os produzirão no esquema com o *software* GeoGebra:

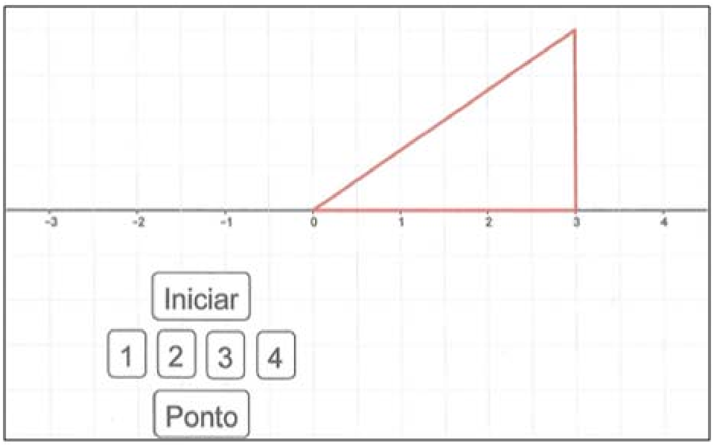
1. Traçar a base do triângulo (1).



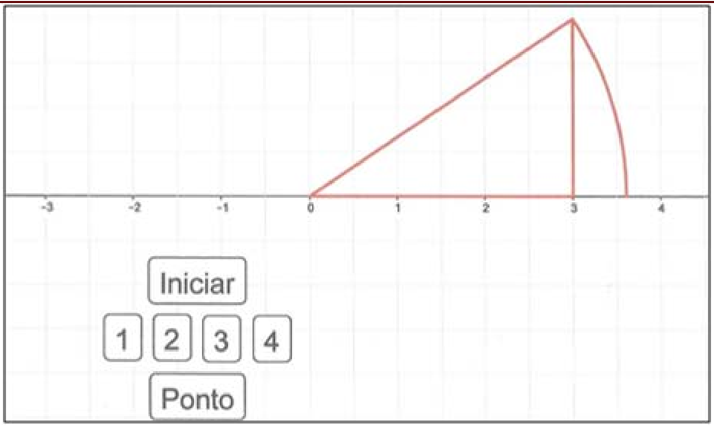
2. Traçar a altura do triângulo (2).



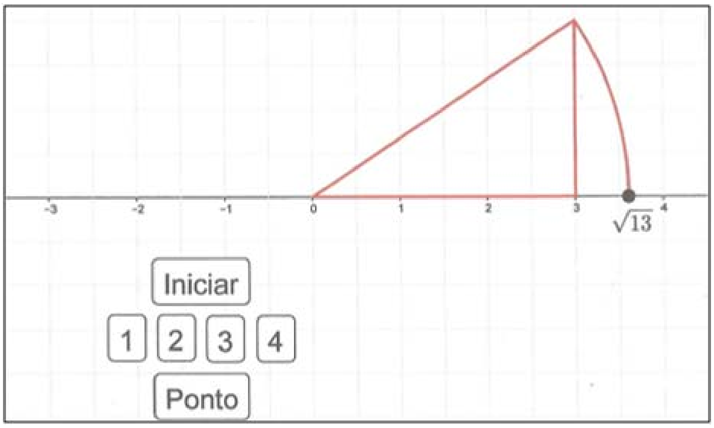
3. Traçar a hipotenusa (3).



4. Traçar o arco de circunferência cuja origem é a origem da reta real e os seus extremos são os extremos do segmento que constitui a altura do triângulo (4).



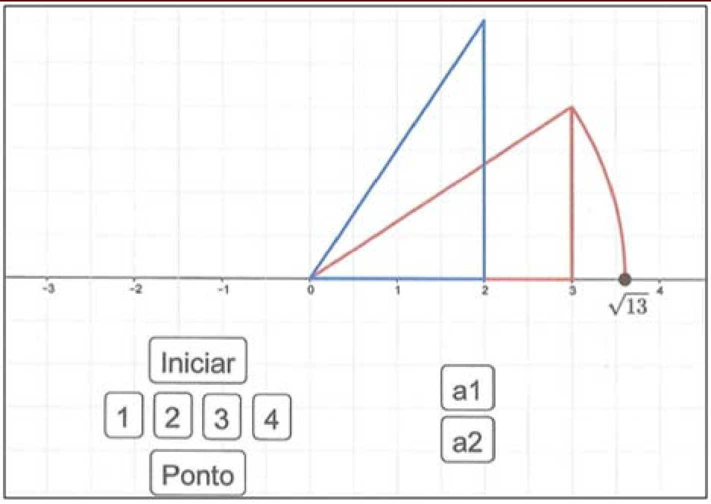
5. Identificar o ponto (Ponto).



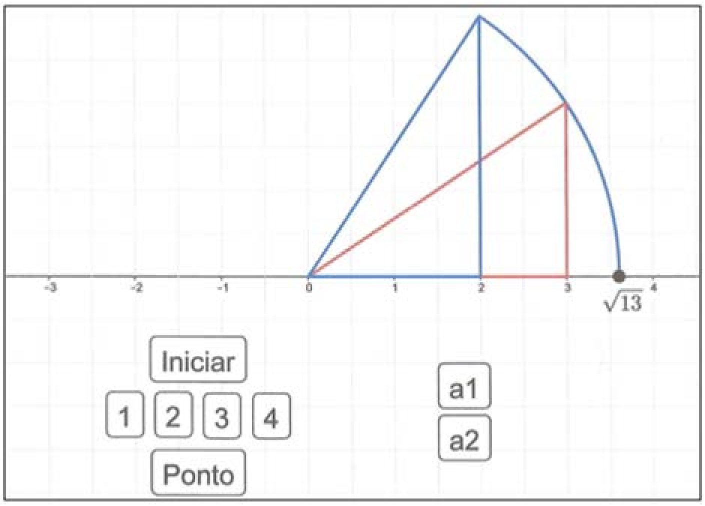
Ao ser projetada esta última figura, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resolução apresentada no quadro ou apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

Para a alínea a1), previu-se que durante o trabalho autónomo, poderiam surgir vários tipos de respostas corretas. Pretende-se abordar essas respostas, caso tenham surgido, durante a discussão, pedindo aos respetivos alunos que as apresentem. Prevê-se que maior parte dos alunos tenha respondido negativamente à questão e apresentado o triângulo de base 2 e altura 3 como alternativa ao triângulo utilizado na alínea a), logo o professor selecionará um aluno ao acaso para responder à questão oralmente. O professor projetará no quadro um esquema representativo da resposta apresentada pelo aluno recorrendo ao *software* GeoGebra esse triângulo e como pode ser usado para representar o número $\sqrt{29}$ na reta real, seguindo os seguintes passos e premindo os botões identificados entre os parênteses:

1. Apresentar o triângulo sugerido pelo aluno (a1)



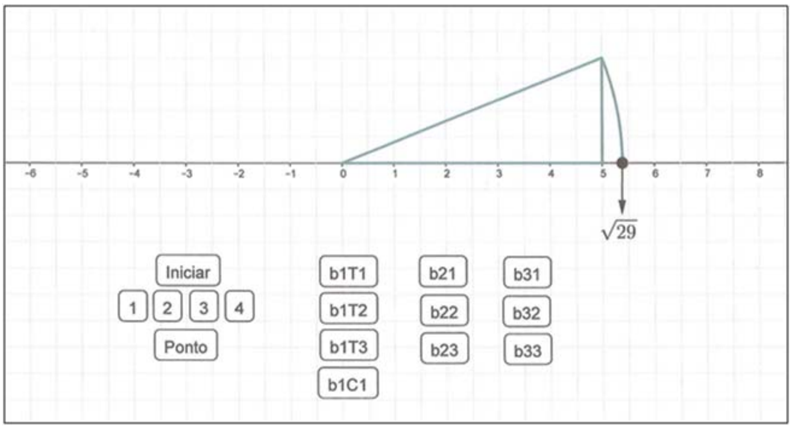
2. Traçar o arco de circunferência cuja origem é a origem da reta real e os seus extremos são os extremos do segmento que constitui a altura do novo triângulo (a2).



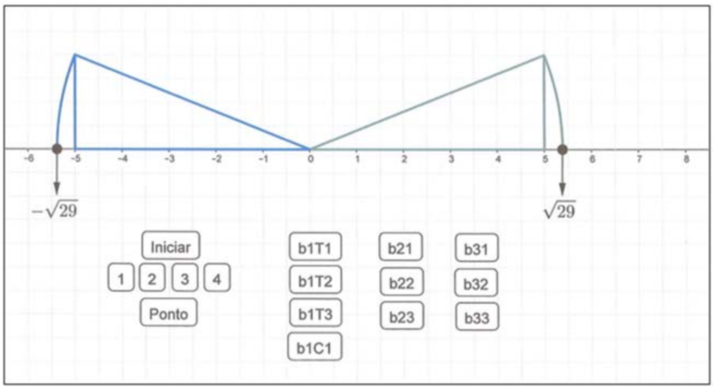
Caso surjam as respostas que foram sugeridas, o professor pedirá aos alunos que as apresentaram durante o trabalho autónomo para agora apresentarem diante dos colegas de modo a garantir que todos os alunos compreendam que o triângulo a construir tem que ter hipotenusa de comprimento $\sqrt{13}$ e seja possível traçar os catetos. Caso um aluno discorde da resposta do colega ou tenha dúvidas, o professor pedirá a este para que esclareça o primeiro; caso o primeiro aluno não esteja esclarecido, o professor pedirá a um outro aluno para que esclareça o colega. Caso o primeiro aluno não fique esclarecido em nenhuma das situações, o professor intervirá.

Para a alínea b), o processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado para a discussão da alínea a). O professor também recorrerá ao *software* GeoGebra e utilizá-lo-á da mesma maneira que na alínea a).

Para a alínea b1), o processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado para a discussão da alínea a). Como se referiu, a representação do número $-\sqrt{29}$ pode ser obtido através da construção de um triângulo retângulo (nas condições referidas atrás) ou traçando uma semicircunferência (nas condições referidas atrás). O professor optará por apresentar a resposta dominante, esta terá sido determinada durante o trabalho autónomo, mas também apresentará a resposta alternativa de modo a suscitar o interesse dos alunos na exploração de resolução desta questão. Tal como nas alíneas anteriores, será usado o *software* GeoGebra para permitir aos alunos uma melhor visualização da resolução desta alínea. Primeiro, será exposta a folha em que serão depois apresentadas as respostas da alínea b1):

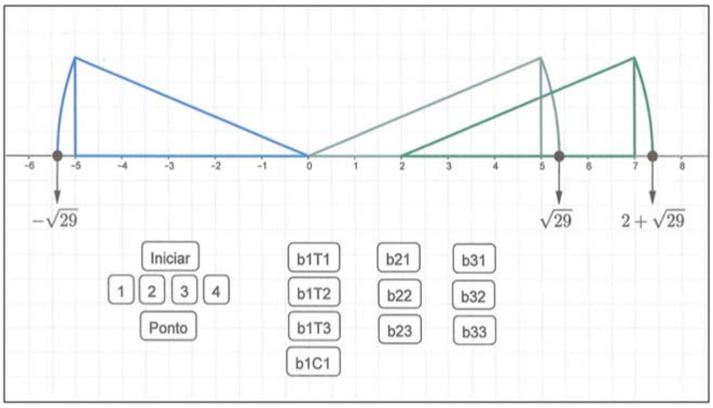


Depois, será pedido a um aluno que responda oralmente à alínea b11). Como se prevê que todos os alunos tenham conseguido responder a esta alínea, a escolha do aluno será aleatória. O processo de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado nas alíneas anteriores. No momento em que todos os alunos concordarem com a resposta do colega, o professor apresentá-la-á diante da turma, começando por apresentar o triângulo (botão b1T1), depois o arco (botão b1T2) e depois o ponto (botão b1T3), obtendo:

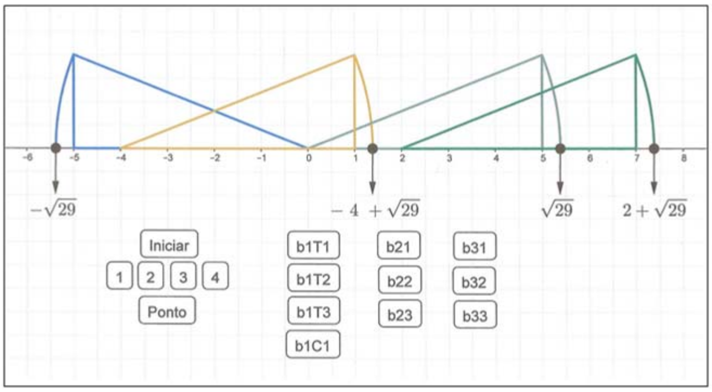


Caso algum aluno tenha sugerido o traçar da semicircunferência para resolver a alínea b11), o professor perguntará aos alunos se concordam com essa estratégia e se todos os alunos concordarem, tendo ou não sido esclarecidos caso mostraram dúvidas quanto essa hipótese, o professor aplicará essa estratégia (botão b1C1) para que os alunos visualizem.

O processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas serão os mesmos que utilizados na alínea b11). O professor usará o *software* GeoGebra para a apresentação da resposta da alínea b12), começando por apresentar o triângulo (botão b21), depois o arco (botão b23) e depois o ponto (botão b23), obtendo:



O processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas serão os mesmos que utilizados nas alíneas anteriores. O professor usará o *software* GeoGebra para a apresentação da resposta da alínea b13), começando por apresentar o triângulo (botão b31), depois o arco (botão b32) e depois o ponto (botão b33), obtendo:



NOTAS
Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto, mas caso sobre tempo serão abordadas algumas das questões das resoluções alternativas ou discutidos os vários tipos de respostas às questões de exploração que se puseram como hipótese de surgirem durante o trabalho autónomo e também na discussão das tarefas.

Plano de Aula 5

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO PLANO DE AULA ANO LETIVO 2016-2017	AEQB AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Data e Hora	24 de março de 2017 das 10h25m às 11h15m
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais

Tópicos, Noções e Conceitos	• Números irracionais • Reta real • Representação de números irracionais na reta real
Sumário	Conclusão da discussão da tarefa *Números irracionais e a reta real* com a turma. Resolução de uma ficha de trabalho sobre a construção geométrica de raízes de números naturais e sua representação na reta real.
Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Reconhecer a existência de números irracionais na reta real. **2.** Reconhecer que entre dois números reais existe uma infinidade de números reais. **3.** Saber utilizar o Teorema de Pitágoras para construir geometricamente raízes de números naturais e representá-los na reta real. **4.** Saber localizar na reta real o simétrico de um número irracional, feita a construção geométrica deste.
Capacidades Transversais	• Raciocínio matemático • Estabelecimento de conexões • Comunicação matemática
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Raio da circunferência • Teorema de Pitágoras • Simétrico de um número
Recursos	**Professor**: Planificação da aula e *software* GeoGebra **Alunos**: Fichas de trabalho, material de escrita e compasso
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.

METODOLOGIA DE TRABALHO

O professor concluirá a discussão da tarefa *Números irracionais e a reta real* com a turma.

O professor apresentará a ficha de trabalho intitulada *Construindo números irracionais na reta real*. O professor pedirá aos alunos para resolverem a ficha autonomamente a par e informá-los-á do tempo que têm para a resolver. Em cada mesa serão entregues dois enunciados da tarefa, um dos enunciados contendo a resolução de cada par será entregue ao professor antes da discussão da tarefa no âmbito do estudo em curso. Depois, proceder-se-á à discussão da tarefa, recorrendo ao *software* GeoGebra.

MOMENTOS DA AULA

(1) Início da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Conclusão da discussão da tarefa *Números irracionais e a reta real*.	10h30m - 10h40m
(3) Apresentação da tarefa *Construindo números irracionais na reta real*.	10h40m - 10h45m
(4) Trabalho autónomo dos alunos.	10h45m - 11h00m

(5) Discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real* com a turma.	11h00m - 11h15m

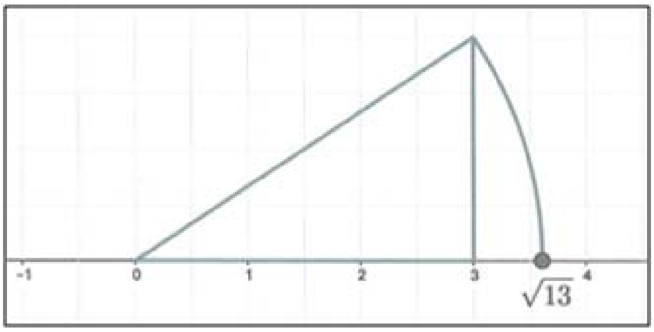
DESENVOLVIMENTO DA AULA	
(1) Início do da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Conclusão da discussão da tarefa *Números irracionais e a reta real.* Abaixo encontra-se a resolução que o professor considerou para a alínea e). A afirmação é verdadeira, porque se selecionarmos as abcissas de dois dos pontos da tabela $\sqrt{5}$ = 2,236067… e $\sqrt{6}$ = 2,449489…, verificamos que existem infinitos números racionais: 2,24; 2,241; 2,2411; 2,4111, etc. No entanto, o professor previu que fossem apresentadas respostas diferentes da exemplificada acima tendo em conta o caráter exploratório desta alínea, e também considerou esta caraterística como fonte de dificuldades por parte dos alunos. Será discutida a última alínea, a alínea e), da tarefa *Números irracionais e a reta real*. O professor pedirá a um aluno, ou mais, que responda oralmente. O professor terá observado as respostas apresentadas pelos alunos durante o trabalho autónomo que decorreu na aula anterior, e selecionará um aluno que possa apresentar uma resposta correta e permita aos alunos refletir sobre a sua veracidade e se existe forma de completar mais a resposta ou até apresentar uma justificação diferente, correta e completa. Pretende-se que seja obtida uma resposta o mais completa e consensual possível entre a turma. Após um aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi dito ou se têm uma resposta diferente ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada no quadro, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega; se algum aluno quiser apresentar uma resposta diferente ou completar a do colega, o professor dará a palavra a esse aluno, considerando a resposta que ele propôs e discutiu com o professor durante o trabalho autónomo. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a resposta de um colega, o professor intervirá.	10h30m - 10h40m
(3) Apresentação da tarefa *Construindo números irracionais na reta real* Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada "*Construindo números irracionais na reta real*" que aborda a construção de raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos e que permite aos alunos explorarem essas construções, baseando-se no trabalho realizado na tarefa anterior. O professor informará os alunos do tempo para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.	10h40m - 10h45m

(4) Trabalho autónomo dos alunos.	10h45m - 11h00m

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que apresentarão as respostas às questões durante a discussão.

O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, com eventuais dificuldades.

Resolução da alínea a):



Notas quanto à resolução: a resolução desta questão é única e corresponde à que é apresentada anteriormente.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam definir uma estratégia de resolução para esta alínea.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos se já tinham visto raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos na reta real. O professor prevê que um deles responda afirmativamente e que recorde os pontos T1, T2 e T3 do enunciado da tarefa *Números irracionais e a reta real*. Aí, o professor perguntará aos alunos como determinaram as abcissas desses números, prevendo que um deles responda que tiveram de determinar o raio da circunferência. O professor perguntará aos alunos como determinaram o raio, prevendo que um deles responda através do Teorema de Pitágoras. O professor perguntará aos alunos porquê o Teorema de Pitágoras, prevendo que um deles responda porque havia um triângulo retângulo. Aí, o professor perguntará aos alunos se conseguem obter um triângulo retângulo para representar $\sqrt{13}$ e direcionar-lhos-á para tabela que preencheram na tarefa *Números irracionais e a reta real*, prevendo que eles consigam representar o número $\sqrt{13}$ na reta real.

Resolução da alínea a1):

Este triângulo não é o único que se pode utilizar, pois também se pode utilizar o triângulo de base 2 e altura 3.

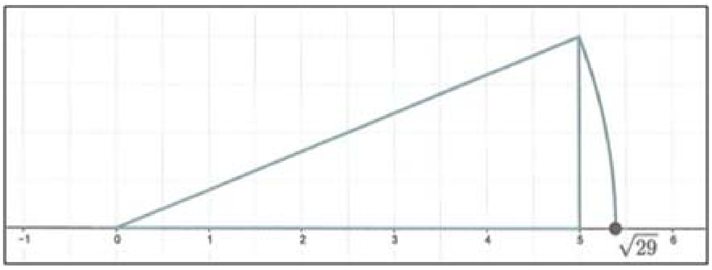
Notas quanto à resolução: tendo em conta o caráter exploratório desta alínea, o professor prevê que sejam apresentadas respostas diferentes da exemplificada acima. Prevê-se que alguns alunos digam que pode ser qualquer triângulo cuja hipotenusa meça $\sqrt{13}$, que uns alunos apresentem um triângulo com dimensões que são números irracionais, que outros alunos tentem desenhar alguns triângulos na figura, entre outras. O importante é que o aluno compreenda que tem de ser um triângulo retângulo cujas dimensões sejam possíveis de traçar.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos mostrem dificuldades em definir uma estratégia de resolução para esta alínea.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos porque é que usaram o triângulo que desenharam na alínea a). O professor prevê que um deles responda porque a hipotenusa mede $\sqrt{13}$ e aí o professor perguntar-lhes-á se não há outro triângulo cuja hipotenusa tenha esse comprimento. Caso os alunos não apresentem nenhuma conclusão, o professor perguntar-lhes-á os comprimentos dos catetos, o comprimento da hipotenusa que obtiveram e depois perguntar-lhes-á se não há outros catetos que farão com que a hipotenusa meça $\sqrt{13}$. O professor prevê assim que eles concluam que em vez de traçar um triângulo retângulo de base 3 e altura 2, pode-se traçar um retângulo de base 2 e altura 3.

Caso os alunos apresentem um triângulo retângulo cuja hipotenusa meça $\sqrt{13}$, mas os comprimentos possuam valores correspondentes a números irracionais, o professor perguntar-lhes-á como é que traçarão os catetos de um triângulo retângulo com esses comprimentos. O professor prevê que os alunos respondam que não é possível, pois não sabem o valor exato desses comprimentos, ou uma resposta semelhante.

Resolução da alínea b):



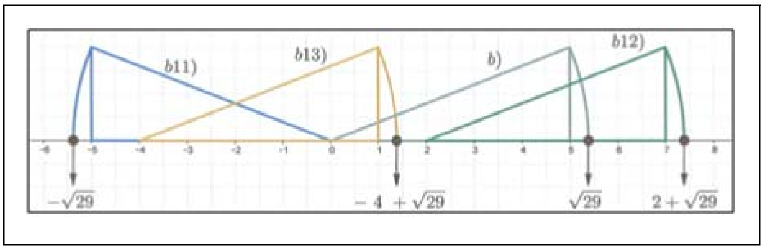
Notas quanto à resolução: os alunos podem não apresentar um triângulo igual a este, visto que existem outros triângulos retângulos cuja hipotenusa meça $\sqrt{29}$ e seja possível traçar. Caso os alunos tenham compreendido a resolução da alínea a1), então os alunos são capazes de apresentar um triângulo diferente deste e é bastante provável que os alunos o tentem apresentar.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos tenham dificuldades em obter um triângulo retângulo para fazer a representação de $\sqrt{29}$ na reta real.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos o que precisam para representar o número $\sqrt{29}$, prevendo que um deles responda de um triângulo retângulo. O professor perguntará aos alunos se existe alguma relação entre os lados do triângulo e o número

$\sqrt{29}$, prevendo que um deles responda que a hipotenusa medirá $\sqrt{29}$. O professor prevê que os alunos concluam que só faltam os comprimentos dos catetos e aí o professor pedirá aos alunos para que apresentem um valor aproximado do número $\sqrt{29}$. O professor prevê que os alunos apresentem 5,38…, depois pedir-lhes-á para localizarem o $\sqrt{29}$ na reta real, prevendo que o localizem entre os pontos de abcissas 5 e 6. Aí, o professor perguntará aos alunos se têm alguma ideia de quanto poderá medir o cateto que constitui a base do triângulo, prevendo que um deles responda 5. O professor pedirá então aos alunos para que explorem os valores possíveis para os catetos se um deles medirá no máximo 5.

Resolução da alínea b1):



Notas quanto à resolução: os alunos podem não apresentar triângulos iguais aos que estão na resolução apresentada. Na representação do número $-\sqrt{29}$, os alunos também podem dispensar o uso de um triângulo retângulo e traçar a semicircunferência cujo centro é a origem do referencial, iniciando-a no ponto de abcissa $\sqrt{29}$ e terminando-a no de abcissa $-\sqrt{29}$.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos tenham dificuldades em representar alguns dos números pedidos.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos:

Em relação ao número $-\sqrt{29}$, o professor perguntará aos alunos se têm alguma ideia onde este número se vai localizar na reta real, prevendo que um deles responda entre os pontos de abcissa - 5 e - 6. O professor perguntará depois aos alunos a que distância da origem da reta real esse ponto se encontra, prevendo que um deles responda $\sqrt{29}$, e aí o professor perguntará aos alunos se o ponto com abcissa $\sqrt{29}$ também se encontra a essa distância da origem da reta, prevendo que um deles responda afirmativamente. O professor perguntará então aos alunos como podem representar $-\sqrt{29}$ na reta real, prevendo que um deles responda usando o triângulo construído na alínea b), fazendo uma simetria de reflexão em relação à reta $x = 0$ (não utilizando necessariamente esta linguagem).

Em relação ao número $2+\sqrt{29}$, o professor pedirá aos alunos para que indiquem o ponto de abcissa 2, prevendo que ambos o façam corretamente, e depois perguntará aos alunos onde se localiza o ponto de abcissa $2+\sqrt{29}$, prevendo que um deles responda que é necessário mover a base do triângulo construído na alínea b) até que esta se situe entre os pontos de abcissa 2 e 7. O professor perguntará então aos alunos como se pode utilizar o triângulo construído na alínea b) para representar o número $2 + \sqrt{29}$, prevendo que um deles responda que tem se efetuar uma translação do triângulo construído na alínea b) segundo o vetor de coordenadas (2,0) (não utilizando necessariamente esta linguagem).

Caso os alunos estejam esclarecidos quanto à representação do $2 + \sqrt{29}$ na reta real, não se prevê que os alunos tenham dificuldades em repetir o processo para o número $-4 + \sqrt{29}$.

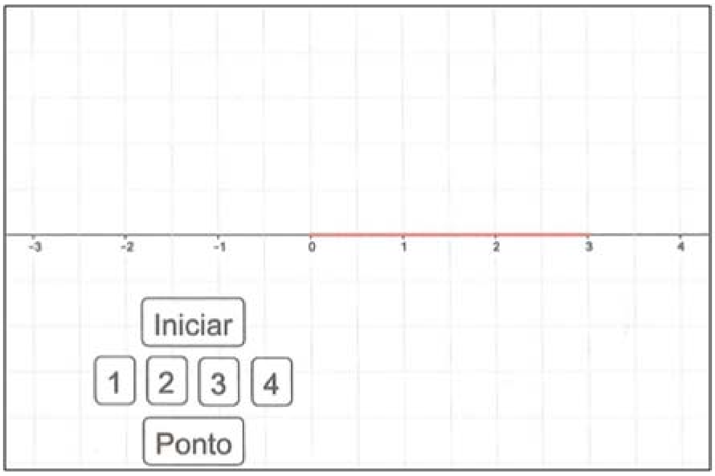
(5) Discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real*.

11h00m - 11h15m

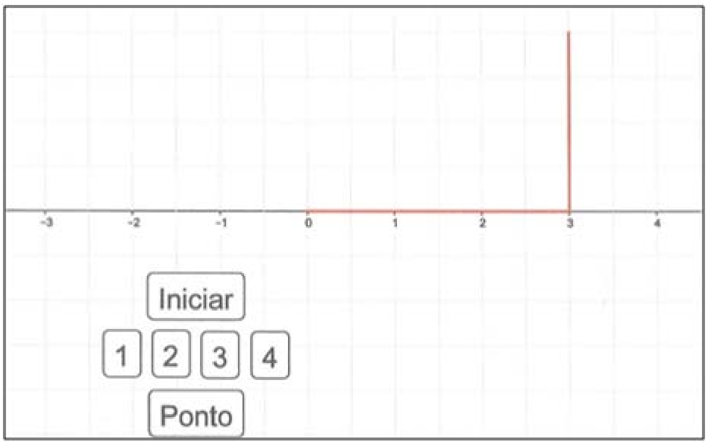
O professor projetará a figura da tarefa no quadro e pedirá a alguns alunos para que respondam oralmente como procederam na representação do número $\sqrt{13}$. Como se prevê que todos os alunos tenham conseguido fazer esta alínea durante o trabalho autónomo, a seleção dos alunos será aleatória, dando prioridade aos alunos que mostraram dificuldades no trabalho autónomo. À medida que cada aluno anuncia cada passo a tomar na construção geométrica, o professor produzirá os resultados desses passos no esquema segundo a orientação do aluno recorrendo ao *software* GeoGebra.

Esses passos são os seguintes e entre os parênteses estão os nomes dos botões que os produzirão no esquema com o *software* GeoGebra:

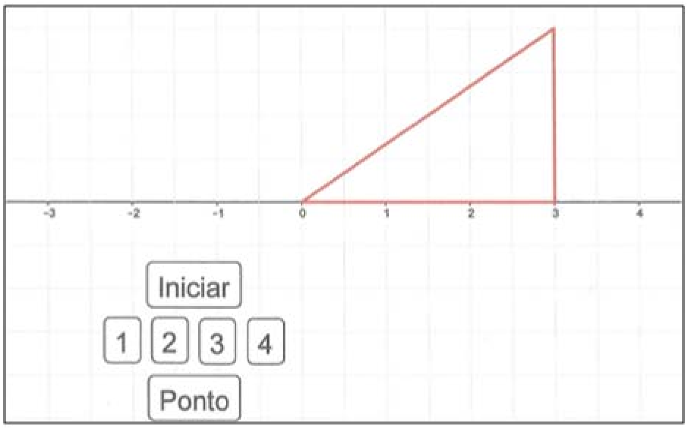
1. Traçar a base do triângulo (1).



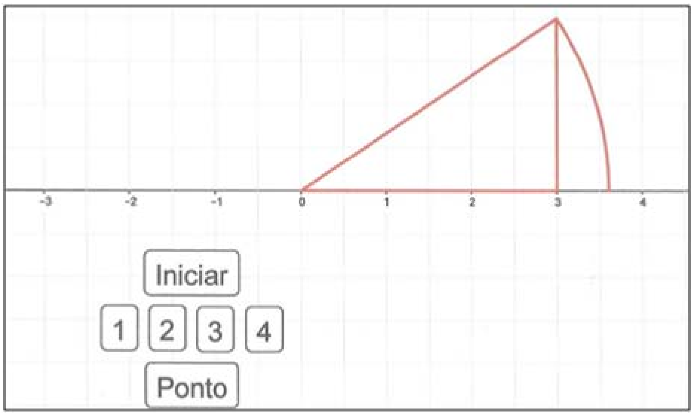
2. Traçar a altura do triângulo (2).



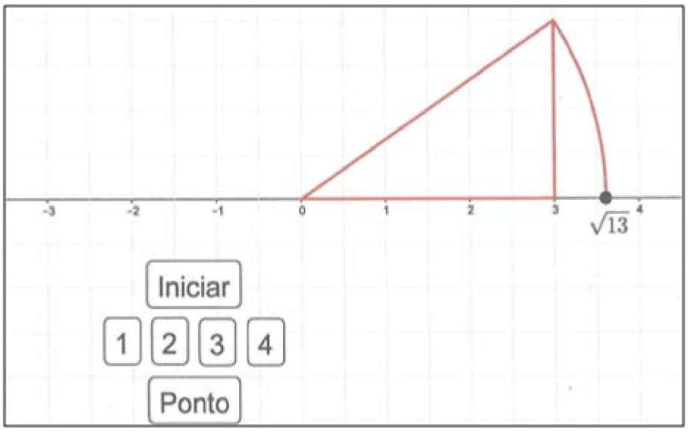
3. Traçar a hipotenusa (3).



4. Traçar o arco de circunferência cuja origem é a origem da reta real e os seus extremos são os extremos do segmento que constitui a altura do triângulo (4).



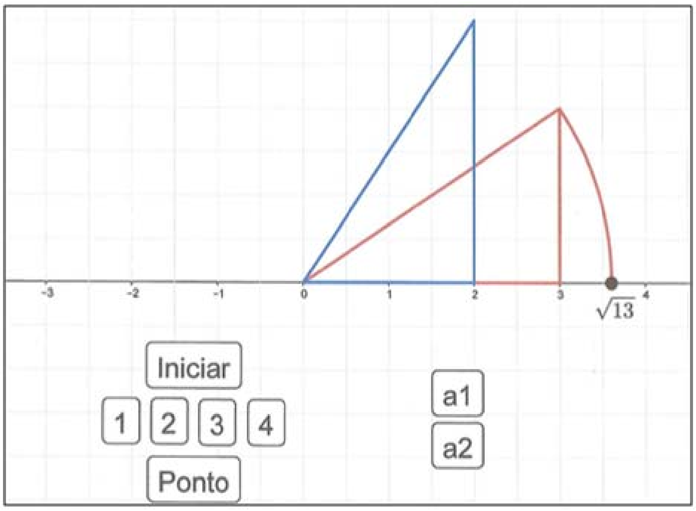
5. Identificar o ponto (Ponto).



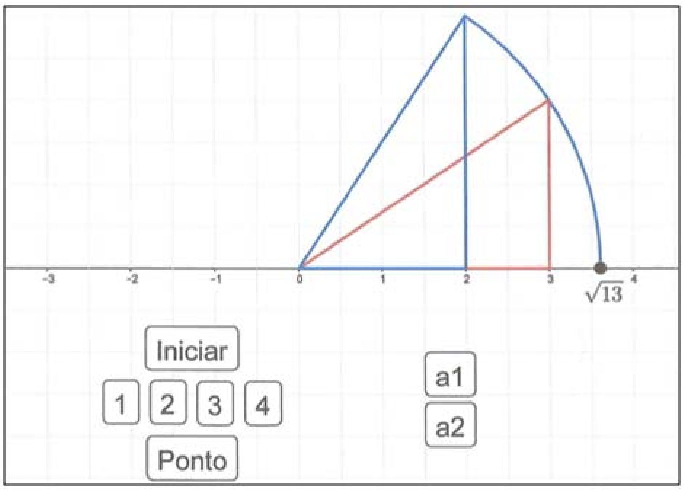
Ao ser projetada esta última figura, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resolução apresentada no quadro ou apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

Para a alínea a1), previu-se que durante o trabalho autónomo, poderiam surgir vários tipos de respostas corretas. Pretende-se abordar essas respostas, caso tenham surgido, durante a discussão, pedindo aos respetivos alunos que as apresentem. Prevê-se que maior parte dos alunos tenha respondido negativamente à questão e apresentado o triângulo de base 2 e altura 3 como alternativa ao triângulo utilizado na alínea a), logo o professor selecionará um aluno ao acaso para responder à questão oralmente. O professor projetará no quadro um esquema representativo da resposta apresentada pelo aluno recorrendo ao *software* GeoGebra esse triângulo e como pode ser usado para representar o número $\sqrt{29}$ na reta real, seguindo os seguintes passos e premindo os botões identificados entre os parênteses:

1. Apresentar o triângulo sugerido pelo aluno (a1)



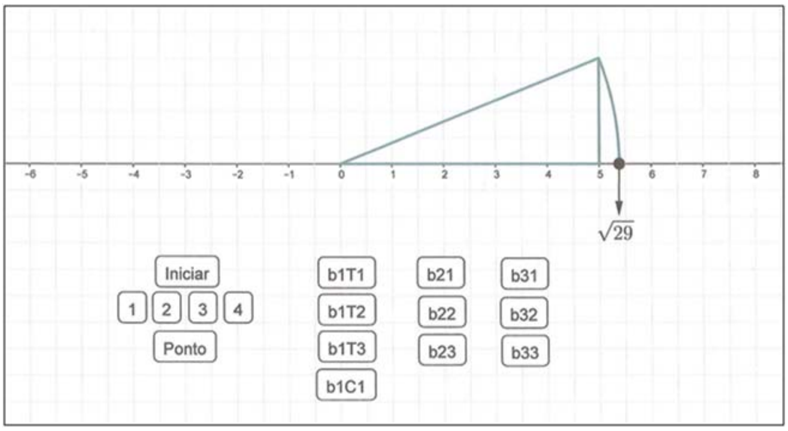
2. Traçar o arco de circunferência cuja origem é a origem da reta real e os seus extremos são os extremos do segmento que constitui a altura do novo triângulo (a2).



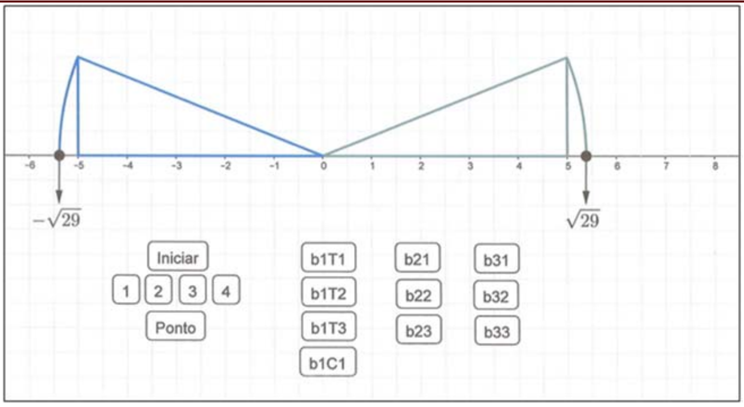
Caso surjam as respostas que foram sugeridas, o professor pedirá aos alunos que as apresentaram durante o trabalho autónomo para agora apresentarem diante dos colegas de modo a garantir que todos os alunos compreendam que o triângulo a construir tem de ter hipotenusa de comprimento $\sqrt{13}$ e seja possível traçar os catetos. Caso um aluno discorde da resposta do colega ou tenha dúvidas, o professor pedirá a este para que esclareça o primeiro; caso o primeiro aluno não esteja esclarecido, o professor pedirá a um outro aluno para que esclareça o colega. Caso o primeiro aluno não fique esclarecido em nenhuma das situações, o professor intervirá.

Para a alínea b), o processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado para a discussão da alínea a). O professor também recorrerá ao *software* GeoGebra e utilizá-lo-á da mesma maneira que na alínea a).

Para a alínea b1), o processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado para a discussão da alínea a). Como se referiu, a representação do número $-\sqrt{29}$ pode ser obtido através da construção de um triângulo retângulo (nas condições referidas atrás) ou traçando uma semicircunferência (nas condições referidas atrás). O professor optará por apresentar a resposta dominante, esta terá sido determinada durante o trabalho autónomo, mas também apresentará a resposta alternativa de modo a suscitar o interesse dos alunos na exploração de resolução desta questão. Tal como nas alíneas anteriores, será usado o *software* GeoGebra para permitir aos alunos uma melhor visualização da resolução desta alínea. Primeiro, será exposta a folha em que serão depois apresentadas as respostas da alínea b1):

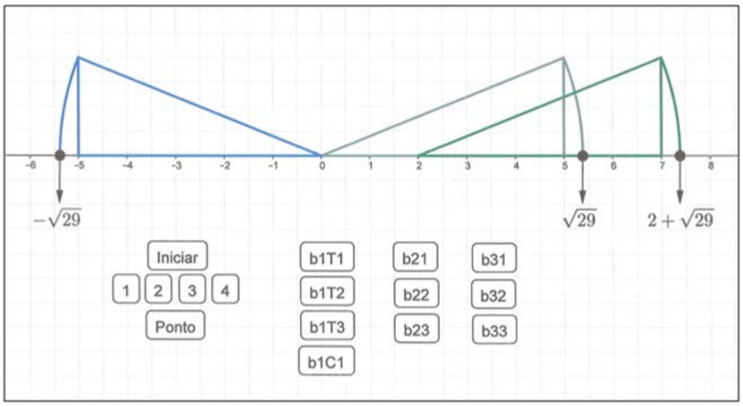


Depois, será pedido a um aluno que responda oralmente à alínea b11). Como se prevê que todos os alunos tenham conseguido responder a esta alínea, a escolha do aluno será aleatória. O processo de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado nas alíneas anteriores. No momento em que todos os alunos concordarem com a resposta do colega, o professor apresentá-la-á diante da turma, começando por apresentar o triângulo (botão b1T1), depois o arco (botão b1T2) e depois o ponto (botão b1T3), obtendo:

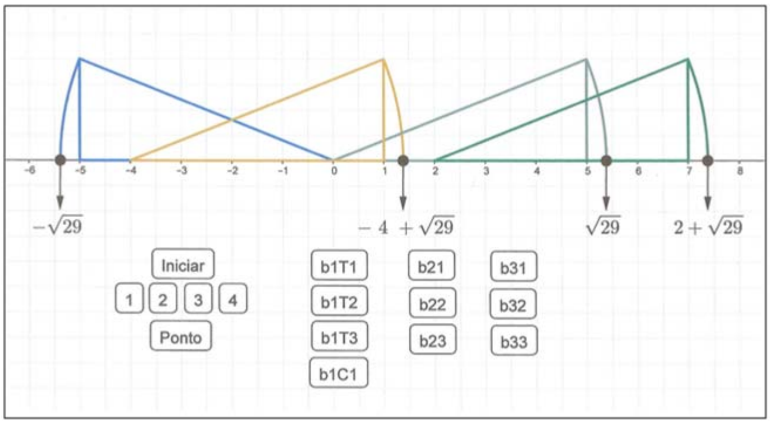


Caso algum aluno tenha sugerido o traçar da semicircunferência para resolver a alínea b11), o professor perguntará aos alunos se concordam com essa estratégia e se todos os alunos concordarem, tendo ou não sido esclarecidos caso mostraram dúvidas quanto essa hipótese, o professor aplicará essa estratégia (botão b1C1) para que os alunos visualizem.

O processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas serão os mesmos que utilizados na alínea b11). O professor usará o *software* GeoGebra para a apresentação da resposta da alínea b12), começando por apresentar o triângulo (botão b21), depois o arco (botão b23) e depois o ponto (botão b23), obtendo:



O processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas serão os mesmos que utilizados nas alíneas anteriores. O professor usará o *software* GeoGebra para a apresentação da resposta da alínea b13), começando por apresentar o triângulo (botão b31), depois o arco (botão b32) e depois o ponto (botão b33), obtendo:



NOTAS
Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto, mas caso sobre tempo serão abordadas algumas das questões das resoluções alternativas ou discutidos os vários tipos de respostas às questões de exploração que se puseram como hipótese de surgirem durante o trabalho autónomo e também na discussão da tarefa.

Plano de Aula 6

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO PLANO DE AULA ANO LETIVO 2016-2017	AEQB – AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Data e Hora	27 de março de 2017 das 9h15m às 10h05m	
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais	
Tópicos, Noções e Conceitos	• Números irracionais • Reta real • Representação de números irracionais na reta real	
Sumário	Discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real* com a turma.	
Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Saber utilizar o Teorema de Pitágoras para construir geometricamente raízes de números naturais e representá-los na reta real. **2.** Saber localizar na reta real o simétrico de um número irracional, feita a construção geométrica deste. **3.** Saber localizar na reta real o número $a + \sqrt{b}$, sendo a real e b natural, após obter a representação de $\sqrt{b}$ na reta real.	
Capacidades Transversais	• Raciocínio matemático • Estabelecimento de conexões • Comunicação matemática	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Raio da circunferência • Teorema de Pitágoras • Simétrico de um número	
Recursos	**Professor**	Planificação da aula e *software* GeoGebra
	Alunos	Fichas de trabalho, material de escrita e compasso
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.	

METODOLOGIA DE TRABALHO
O professor iniciará a discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real* com a turma, recorrendo ao *software* GeoGebra. Tendo em conta as dificuldades que os alunos mostraram durante o trabalho autónomo na realização desta tarefa na aula anterior, e que teve uma duração de 35 minutos, o professor optou por dedicar esta aula inteiramente à sua discussão de modo a garantir que todos os alunos vejam as suas dúvidas esclarecidas.

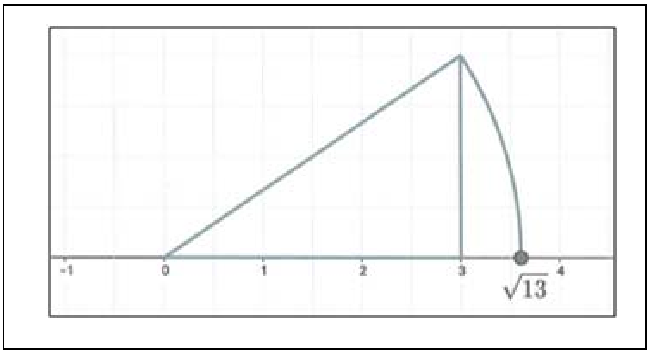
MOMENTOS DA AULA	
(1) Início da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real* com a turma.	10h30m - 11h15m

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(1) Início do da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro. — 10h25m - 10h30m

(2) Discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real* com a turma. — 10h30m - 11h15m

Abaixo encontra-se uma possível resolução da alínea a):



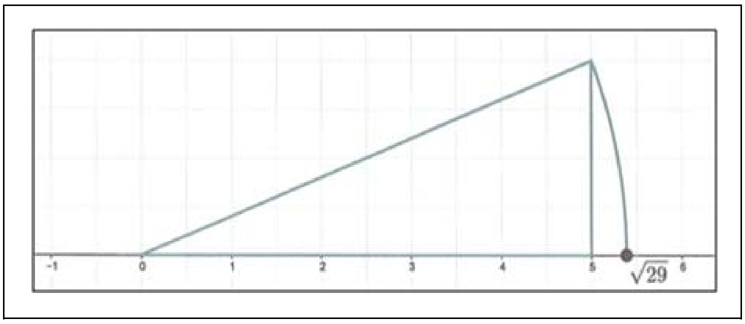
Durante o trabalho autónomo, o professor verificou várias dificuldades por parte dos alunos em estabelecerem conexões com o enunciado desta alínea com o trabalho realizado na resolução da tarefa *Números irracionais e a reta real*. No entanto, houve vários alunos que conseguiram apresentar esta resolução, ou uma resolução alternativa e correta, com a ajuda do professor durante o trabalho autónomo. Também se revelaram dificuldades por parte dos alunos em utilizar corretamente a escala apresentada.

Abaixo encontra-se uma possível resposta para a alínea a1):

> Este triângulo não é o único que se pode utilizar, pois também se pode utilizar o triângulo de base 2 e altura 3.

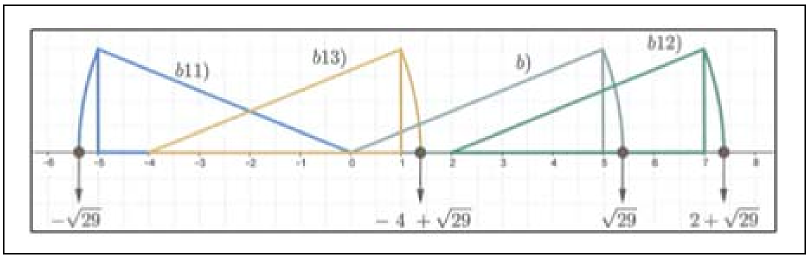
Nesta alínea, houve muitos alunos que apresentaram uma resposta semelhante a esta e também houve alunos que conseguiram reconhecer que o triângulo utilizado na alínea a) não era único, mas não conseguiram apresentar uma justificação.

Abaixo encontra-se uma possível resposta para a alínea b):



Nesta alínea, os alunos não mostraram dificuldades em fazer a construção geométrica necessária para representar $\sqrt{29}$ na reta real, mas não se verificou isso quando os alunos tentavam encontrar os comprimentos dos catetos. No entanto, após alguns alunos serem apoiados pelo professor e depois voltarem ao trabalho, eles conseguiram chegar à resposta apresentada.

Abaixo encontra-se uma possível resposta para a alínea b1):

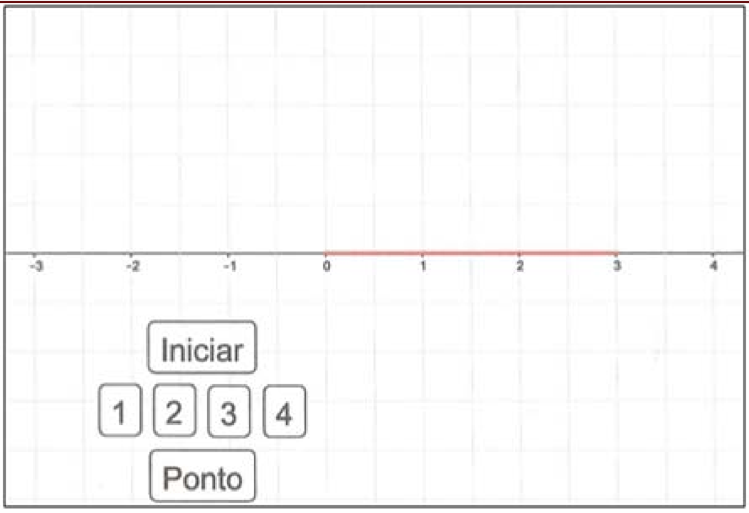


Devido às dificuldades que muitos alunos mostraram na resolução das alíneas anteriores, não foi possível para muitos alunos apresentarem uma resolução desta alínea. Aqueles que apresentaram, não mostraram dificuldades em fazer a alínea b11), mas depois mostraram nas alíneas b12) e b13).

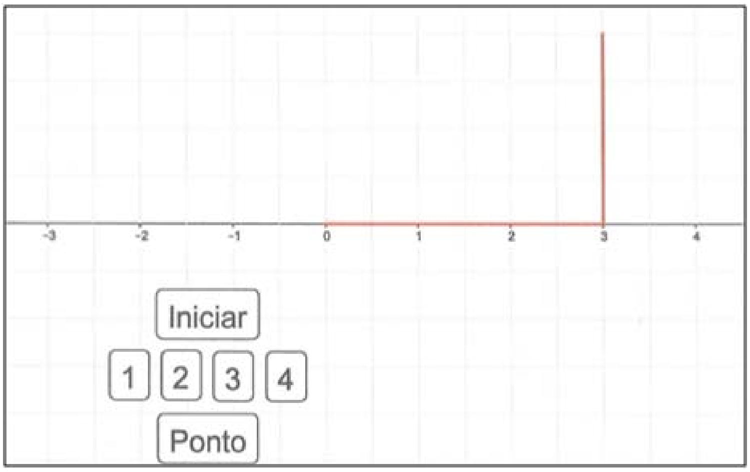
Discussão da tarefa *Construindo números irracionais na reta real*.

O professor projetará a figura da tarefa no quadro e pedirá a um aluno para que vá ao quadro e explique aos colegas como proceder na representação do número $\sqrt{13}$ na reta real. Tendo em conta que todos os alunos apresentaram uma resposta a esta alínea, a seleção do aluno será aleatória. Com a ajuda do professor, o aluno apresentará a resolução recorrendo ao *software* GeoGebra de modo a garantir que os alunos compreendam a construção geométrica apresentada. A resolução desta alínea com o *software* GeoGebra seguirá os seguintes passos:

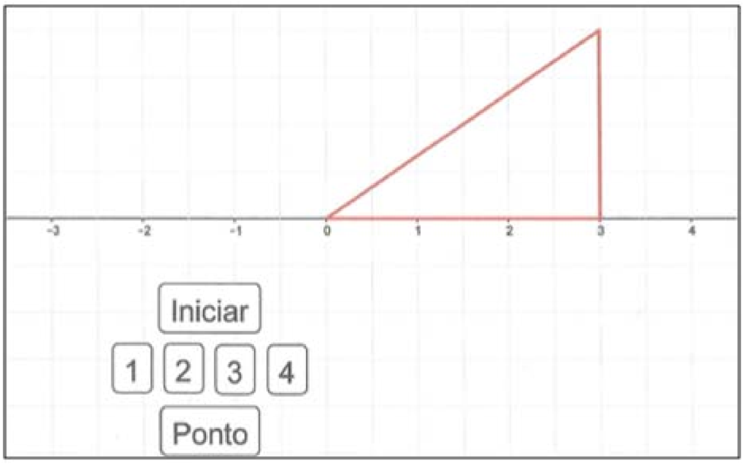
1. Traçar a base do triângulo (1).



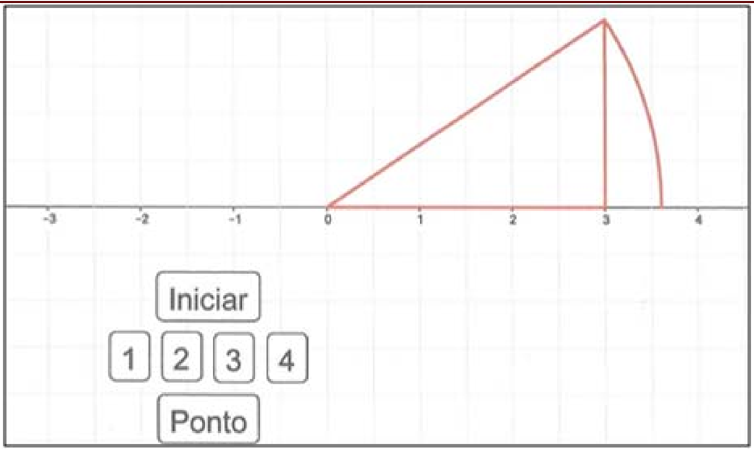
2. Traçar a altura do triângulo (2).



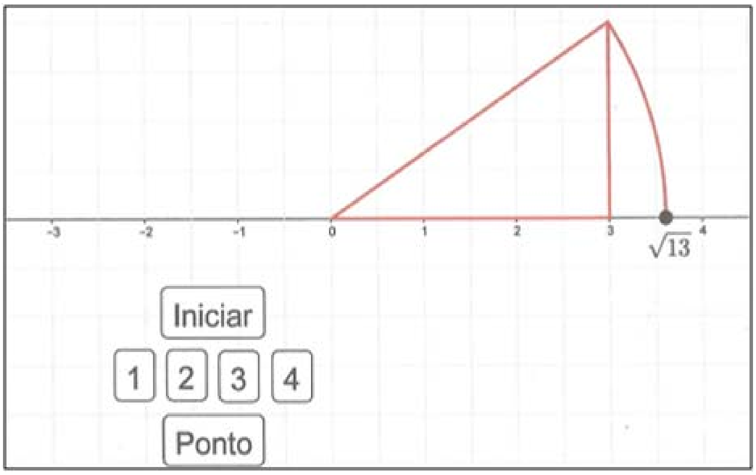
3. Traçar a hipotenusa (3).



4. Traçar o arco de circunferência cuja origem é a origem da reta real e os seus extremos são os extremos do segmento que constitui a altura do triângulo (4).



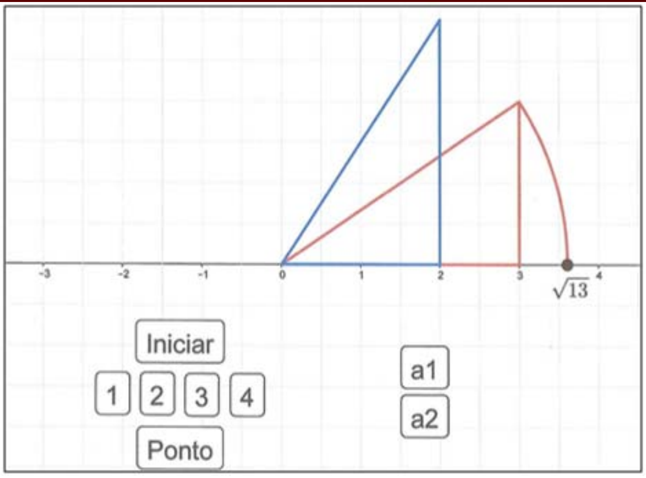
5. Identificar o ponto (Ponto).



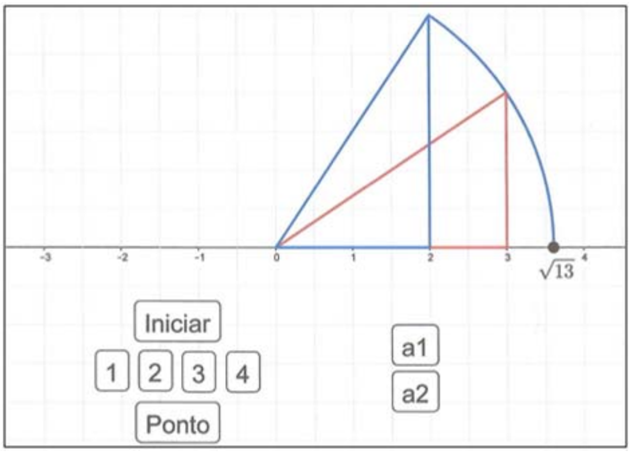
Ao ser projetada esta última figura, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resolução apresentada no quadro ou apresente dúvidas, o professor pedirá ao aluno que foi ao quadro para a tirar ao colega; caso o primeiro aluno não fique esclarecido, o professor pedirá à turma para que alguém se ofereça para esclarecer o colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

Para a alínea a1), o professor repetirá o processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas que utilizou para a alínea a). Pretende-se explorar as respostas dos alunos que possam garantir uma melhor compreensão da resolução desta alínea. Como a resposta mais frequente entre as resoluções dos alunos foi a apresentação do triângulo de base 2 e altura 3 como alternativa ao triângulo utilizado na alínea a), o professor selecionará um aluno que tenha apresentado esta resposta para ir ao quadro apresentar esta resposta. A resolução desta alínea com o *software* GeoGebra seguirá os seguintes passos:

1. Apresentar o triângulo sugerido pelo aluno (a1)

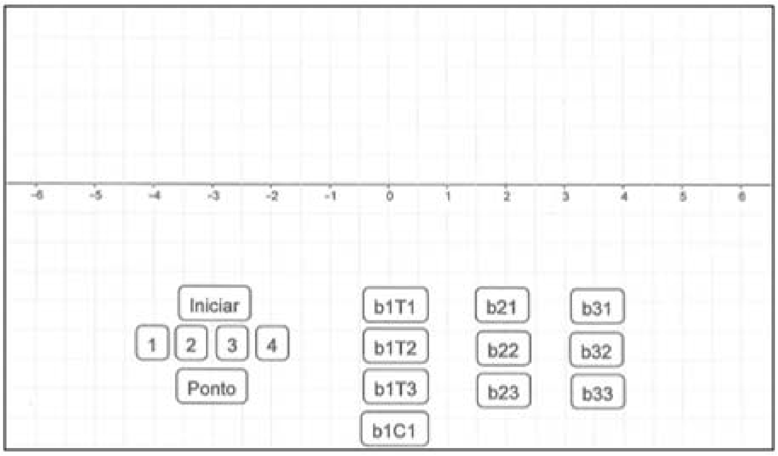


2. Traçar o arco de circunferência cuja origem é a origem da reta real e os seus extremos são os extremos do segmento que constitui a altura do novo triângulo (a2).

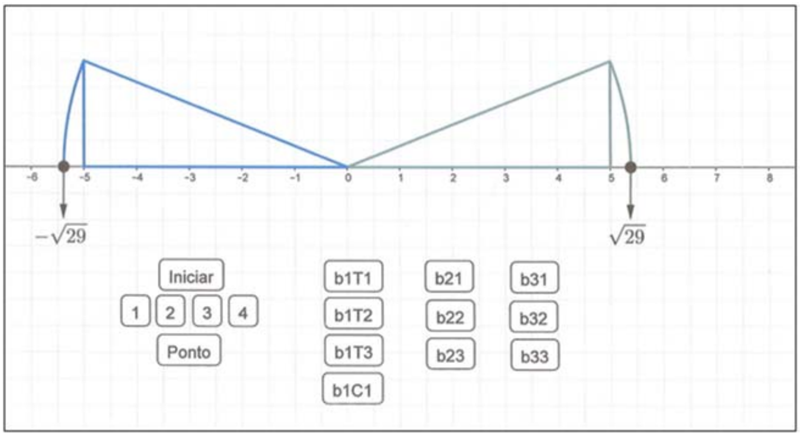


Para a alínea b), o processo de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado para a discussão das alíneas anteriores.

Primeiro, será exposta a folha em que serão depois apresentadas as respostas da alínea b1).

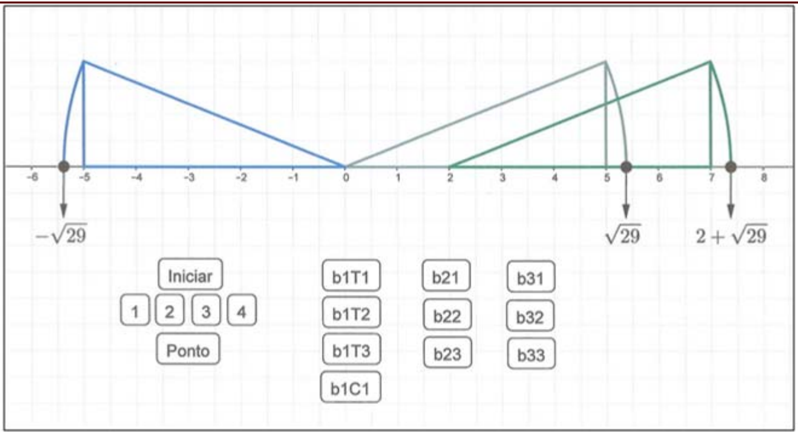


Para a alínea b11), como se referiu, a representação do número $-\sqrt{29}$ na reta real pode ser obtido através da construção de um triângulo retângulo (nas condições referidas atrás) ou traçando uma semicircunferência (nas condições referidas atrás). Como ambas as respostas foram apresentadas sem nenhuma ser dominante, o professor optará por perguntar à turma como resolver esta alínea recordando a tarefa *Números irracionais e a reta real*, especificamente a alínea que aborda pontos de abcissas simétricas. O professor selecionará um aluno para ir ao quadro e apresentar a resolução no quadro recorrendo ao *software* GeoGebra. Pretende-se selecionar um aluno que não tenha apresentado a resposta durante o trabalho autónomo. O processo de esclarecimento de dúvidas adotado será o mesmo que utilizado nas alíneas anteriores. A resolução desta alínea com o *software* GeoGebra seguirá os seguintes passos:

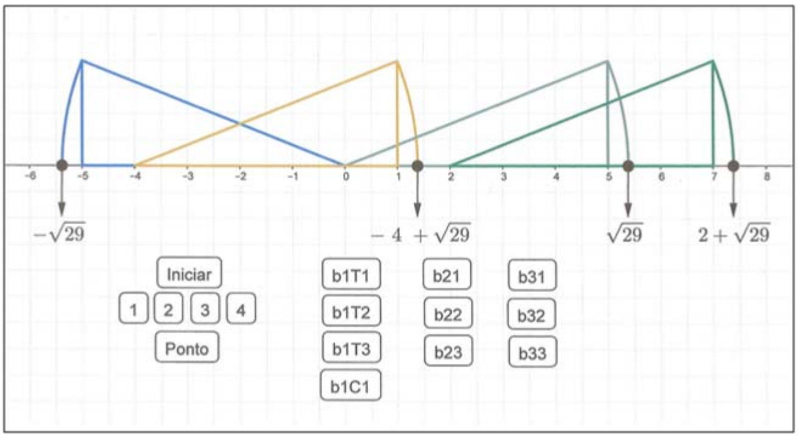


Depois, o professor perguntará à turma se conhecem outro método e dar-se-á a palavra a um aluno que não tenha apresentado a resolução envolvendo a construção do triângulo retângulo. Caso nenhum destes alunos consiga apresentar uma resposta, o professor escolherá assim um aluno que tenha apresentado esta resolução no trabalho autónomo e pedir-lhe-á para ir ao quadro apresentar essa resolução recorrendo ao *software* GeoGebra. Em qualquer uma das situações e caso surjam dúvidas, será adotado o processo de esclarecimento utilizado nas alíneas anteriores.

Para a alínea b12), o professor verificou que apenas um par de alunos mostrou uma resolução correta e completa, logo o professor perguntará primeiro à turma como se podia resolver esta alínea, dando a palavra aos alunos que não tenham apresentado uma resolução, de modo a garantir que esta questão seja explorada o melhor possível entre a turma. Caso a turma não consiga apresentar uma estratégia de resolução, o professor pedirá a um dos alunos do par referido para apresentar a resolução recorrendo ao *software* GeoGebra. A hipótese de estender a discussão desta alínea antes de chamar um dos alunos do par referido dependerá do tempo restante para a aula. O processo de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que utilizados em alíneas anteriores. A resolução desta alínea com o *software* GeoGebra seguirá os seguintes passos:



Os processos de discussão e de esclarecimento de dúvidas para a alínea b13) serão os mesmos que utilizados para a alínea b12).



NOTAS
Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto, mas caso sobre tempo serão abordadas algumas das questões das resoluções alternativas ou discutidos os vários tipos de respostas às questões de exploração que se puseram como hipótese de surgirem durante o trabalho autónomo e também na discussão da tarefa.

Plano de Aula 7

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO
PLANO DE AULA
ANO LETIVO 2016-2017

Data e Hora	30 de março de 2017 das 10h25m às 12h15m
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais
Tópicos, Noções e Conceitos	• Operações com números irracionais, especificamente raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos

Sumário	Resolução de duas fichas de trabalho sobre operações com números irracionais.
Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Saber que a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a potenciação se podem estender aos números reais. **2.** Saber que só se pode somar e subtrair raízes quadradas de números naturais quando o radicando é igual. **3.** Saber que o produto das raízes quadradas de dois números é igual à raiz quadrada do produto desses números. **4.** Saber que o quociente das raízes quadradas de dois números é igual à raiz quadrada do quociente desses números. **5.** Saber que o quadrado da raiz quadrada de qualquer número positivo é igual a esse número.
Capacidades Transversais	• Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Interpretação de problemas
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Operações com números racionais
Recursos	**Professor**: Planificação da aula **Alunos**: Fichas de trabalho e material de escrita
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.

METODOLOGIA DE TRABALHO

Nesta aula, serão abordadas as operações com números irracionais, especificamente as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos.

Os alunos realizarão duas fichas de trabalho: a primeira intitulada *Operações com números irracionais* e a segunda *Números irracionais: operações e comparações*. O professor pedirá aos alunos para resolverem a ficha autonomamente a pares e informá-los-á do tempo que têm para os resolver. Em cada mesa serão entregues dois enunciados da tarefa, um dos enunciados contendo a resolução de cada par será entregue ao professor antes da discussão da tarefa no âmbito do estudo em curso.

Após cada momento do trabalho autónomo dos alunos de cada tarefa, seguir-se-á a sua discussão em grande grupo.

MOMENTOS DA AULA

(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Apresentação da tarefa *Operações com números irracionais*.	10h30m - 10h35m
(3) Trabalho autónomo dos alunos.	10h35m - 11h00m
(4) Discussão da tarefa *Operações com números irracionais* com a turma.	11h00m - 11h15m
(5) Início do 2º tempo da aula: entrada dos alunos.	11h25m - 11h30m
(6) Conclusão da discussão da tarefa *Operações com números irracionais* com	11h30m - 11h40m

a turma.	
(7) Apresentação da tarefa *Números irracionais: operações e comparações*.	11h40m - 11h45m
(8) Trabalho autónomo dos alunos.	11h55m - 12h00m
(9) Discussão da tarefa *Números irracionais: operações e comparações* com a turma.	12h00m - 12h15m

DESENVOLVIMENTO DA AULA	
(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Apresentação da tarefa *Operações com números irracionais*. Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada *Operações com números irracionais* para introduzir aos alunos as operações com números irracionais, especificamente com raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos. O professor informará os alunos do tempo que têm para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.	10h30m - 10h35m
(3) Trabalho autónomo dos alunos. O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que irão ao quadro apresentar uma proposta de resolução. O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, nas eventuais dificuldades. **Resolução da Questão 1:** $10\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ $2\sqrt{11} - 6\sqrt{11} + 8\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$ Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam aplicar a regra da adição e subtração com raízes quadradas de números naturais, e acabem por somar e subtrair as raízes e não apenas os coeficientes. Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor pedirá aos alunos para que olhem atentamente para as operações apresentadas e se identificam algo em comum nos radicais, prevendo que um deles responda que todos têm o mesmo radicando. De modo que os alunos compreendam a adição e a subtração de raízes quadradas de números naturais, o professor perguntar-lhes-á quando se podem somar ou subtrair quaisquer raízes quadradas de números naturais, prevendo que um deles responda que têm que ter o mesmo radicando. Depois, o professor perguntará aos alunos se identificam algum padrão no modo como se somam e subtraem raízes quadradas. Prevê-se que um dos alunos responda que a raiz se mantém	10h35m - 11h00m

sempre com o mesmo radicando e aí o professor perguntará quais foram os números que se somaram e se subtraíram em cada operação apresentada. Prevê-se que os alunos respondam que foram os coeficientes em cada radical e concluam assim que para obter o resultado final têm que somar ou subtrair os coeficientes dos radicais e a raiz mantém-se.

Resolução da Questão 2:

Não, porque $\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$, que é diferente de $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

Notas quanto à resolução: os alunos podem apresentar respostas diferentes da exemplificada quanto ao uso de exemplos.

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos mostrem dificuldades na interpretação do enunciado e em definir uma estratégia de resolução para esta questão.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: para garantir que os alunos compreendam a igualdade $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$, o professor perguntar-lhes-á se concordam com a igualdade $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Caso os alunos respondam afirmativamente, o professor pedir-lhes-á que justifiquem. Caso os alunos respondam negativamente, o professor perguntará aos alunos o resultado de cada raiz, prevendo que ambos apresentem uma resposta correta e depois perguntar-lhes-á se a igualdade se verifica, prevendo que um deles responda afirmativamente.

O professor pedirá aos alunos para que leiam a questão atentamente e depois destacará a expressão *quaisquer números*. O professor perguntará aos alunos se todos os números respeitam a igualdade apresentada. Prevendo que alguns alunos respondam afirmativamente, o professor pedirá aos alunos apresentem exemplos de dois números (diferentes de 0 e 1) e averiguem se verificam a igualdade. O professor prevê que os alunos encontrem esses dois números e concluam que não verificam a igualdade. Caso os alunos não sejam capazes de tirar uma conclusão se os resultados de cada operação são iguais, o professor pedir-lhes-á para que experimentem dois números cujas raízes conseguem calcular de imediato, ou seja, números que são quadrados perfeitos. Caso os alunos não consigam dar exemplos de dois números nessas condições, o professor sugerirá o 4 e o 9. O professor prevê assim que os alunos obtenham os valores $\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$ e $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, concluam que $5\neq\sqrt{13}$ e respondam assim à questão.

Resolução da Questão 3:

$\sqrt{3}\times\sqrt{11}=\sqrt{33}$

$\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{8}=\sqrt{80}$

$\sqrt{15}\div\sqrt{3}=\sqrt{5}$

$\left(\sqrt{10}\div\sqrt{5}\right)\times\sqrt{6}=\sqrt{12}$

Dificuldades previstas: não se preveem dificuldades por parte dos alunos na resolução desta alínea, pois prevê-se que eles consigam compreender a regra enunciada acerca da multiplicação e da divisão de raízes quadradas de números naturais. Também não se preveem dificuldades por parte dos alunos na última operação, pois prevê-se que os alunos compreendam que têm de efetuar a divisão e depois multiplicar esse resultado por $\sqrt{6}$.

Resolução da Questão 4:

Não concordo, porque $5 \times \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$ e não $\sqrt{30}$.

Notas quanto à resolução: os alunos podem apresentar respostas diferentes da exemplificada. Por exemplo, os alunos podem argumentar que a resposta está errada por $\sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}$. Esta justificação está correta, mas não contribui para o aluno compreender que $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ é igual a $a\sqrt{b}$ e não a $\sqrt{a \times b}$.

Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos acreditem que a igualdade é verdadeira; também se prevê que alguns alunos reconheçam que a desigualdade é falsa, mas tenham dificuldades em apresentar uma justificação.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos se concordam com a igualdade apresentada. Caso os alunos concordem com a igualdade, o professor perguntará porquê, prevendo que um deles responda que fez o produto de 5 por 6 e que, portanto, é $\sqrt{30}$. O professor pedirá então aos alunos para que olhem para os exemplos das operações e do trabalho que realizaram na questão 3. Depois, o professor perguntará aos alunos de que números se tratam, prevendo que um dos alunos responda que são números irracionais. O professor perguntará então aos alunos se a igualdade é verdadeira, prevendo que um deles responda negativamente e que é falsa porque o primeiro número não é irracional e que no seu lugar teria que estar $\sqrt{5}$ e não 5.

O professor ainda perguntará aos alunos qual seria então o resultado da expressão $5 \times \sqrt{6}$. Caso os alunos não saibam responder, o professor pedirá aos alunos para que olhem para os exemplos das operações da questão 1, especificamente para os radicais. O professor escolherá um ao acaso, por exemplo $2\sqrt{3}$ e perguntará que operação está a decorrer entre o 2 e o $\sqrt{3}$, prevendo que um dos alunos responda que os dois números estão a multiplicar um pelo outro. O professor voltará a perguntar o resultado de $5 \times \sqrt{6}$, prevendo que um deles responda $5\sqrt{6}$.

Resolução da Questão 5:

$$(\sqrt{6})^2 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$$

$$(2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$$

$$\left(-3\sqrt{6}\right)^2 = \left(-3\sqrt{6}\right) \times \left(-3\sqrt{6}\right) = 9 \times \sqrt{36} = 9 \times 6 = 54$$

Notas quanto à resolução: para a primeira linha, os alunos podem escrever de imediato o resultado da potência em vez de a transformar num produto de fatores, pois eles já demonstraram conhecimentos de que o quadrado da raiz quadrada de um número é igual a esse número.

Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades em transformar cada potência num produto, e também não se prevê que os alunos mostrem dificuldades efetuar o produto na primeira linha. No entanto prevê-se que os alunos tenham dificuldades em efetuar os produtos nas duas últimas linhas: prevê-se que os alunos não saibam calcular $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$ na segunda operação ou $(-3\sqrt{6}) \times (-3\sqrt{6})$ na terceira. Prevê-se que os alunos comentam erros semelhantes aos seguintes: $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ e $\left(-3\sqrt{6}\right) \times \left(-3\sqrt{6}\right) = 9\sqrt{6}$ ou $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 4 \times 9$ e $\left(-3\sqrt{6}\right) \times \left(-3\sqrt{6}\right) = 9 \times 36$.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos se existe outra maneira de escrever $2\sqrt{3}$ e caso não consigam, o professor perguntará que operação está a decorrer entre 2 e $\sqrt{3}$, prevendo que os alunos concluam que $2\sqrt{3}$ é igual a $2 \times \sqrt{3}$. Para garantir esta compreensão, o professor perguntará aos alunos quando se tem um número na forma $a\sqrt{b}$, que operação está a decorrer entre a e $\sqrt{b}$, prevendo que os alunos respondam que os dois números estão a multiplicar um pelo outro.

O professor perguntará depois aos alunos se existe outra forma de escrever $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$, tendo em conta que $2\sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3}$, prevendo que um deles responda que $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$ é igual a $2 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3}$. O professor perguntará então aos alunos se estes números têm que estar necessariamente pela ordem que se apresentam, prevendo que um deles responda que se pode trocar a ordem dos números. O professor perguntará aos alunos o nome dessa propriedade, prevendo que um deles responda que corresponde à propriedade comutativa da multiplicação. Aí, o professor perguntará aos alunos de que forma se poderia aplicar a propriedade comutativa de modo a facilitar o cálculo do resultado, prevendo que um dos alunos responda que seria mais vantajoso escrever $2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$. O professor perguntará então aos alunos como se pode chegar ao resultado da operação, prevendo que um deles conclua que a expressão anterior é igual a $4 \times \sqrt{9}$, que é igual a 4×3, que é igual 12.

Caso os alunos apliquem a propriedade comutativa da multiplicação tal que obtenham $2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 2$, o professor perguntará aos alunos quais os dois números que multiplicarão primeiro. Caso um dos alunos responda 2 e $\sqrt{3}$, o professor perguntar-lhe-á o que obterá, prevendo que responda $2\sqrt{3}$ e aí o professor perguntará aos dois alunos se conseguiram obter algum resultado para a operação, prevendo que ambos respondam negativamente e ainda reconheçam que "voltaram para trás" no cálculo da operação. O professor pedirá então aos alunos para que reconsiderem $2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 2$ e que vejam que outros dois números podem multiplicar para além dos que sugeriram anteriormente. Caso os alunos respondam $\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$, o professor perguntará o resultado, prevendo que um deles responda $\sqrt{9}$ e que depois conclua que é 3. O professor prevê que os alunos consigam depois obter o resultado final. Caso os alunos respondam que poderiam multiplicar 2 e 2, o professor concordará e depois perguntará como é que os alunos depois avançarão no cálculo do resultado da operação. O professor prevê que um dos alunos responda que só falta multiplicar $\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ e aí seguirá o mesmo processo descrito anteriormente.

Caso os alunos mostrem dificuldades na resolução da última alínea, o professor recorrerá ao método anteriormente descrito para os apoiar.

Completamento da Tabela:

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}, a, b \in \mathbb{R}, c \geq 0$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}, a, b \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$$

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos não mostrem dificuldades em obter o resultado da potenciação, pois já mostraram em aulas anteriores que sabem que o quadrado da raiz quadrada de um número é igual a esse número.

Prevê-se que os alunos mostrem dificuldades nas restantes operações no uso de linguagem algébrica.

Também se prevê que os alunos não indiquem para cada operação os valores que *a*, *b* e *c* podem tomar.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos:

→ Para a adição, o professor pedirá aos alunos para voltarem à questão 1 e observarem a operação $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ e que descrevam como se chegou ao resultado final. Prevê-se que um dos alunos apresente uma resposta semelhante à seguinte: *Somou-se o 2 com o 3 e depois fica raiz de 3 que é comum*. O professor pedirá então aos alunos para que tentem generalizar esse processo usando os símbolos da expressão $a\sqrt{c} + b\sqrt{c}$, prevendo que um deles escreva como resultado final a expressão $a + b\sqrt{c}$. O professor pedirá então aos alunos para que observem a operação $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ e verifiquem se este resultado segue a regra que definiram. Caso os alunos respondam afirmativamente ou concluam que o resultado não segue a regra, mas depois não conseguem chegar ao resultado pretendido, o professor pedirá aos alunos para que identifiquem a operação entre os números 5 e $\sqrt{3}$. Prevê-se que um dos alunos responda que os dois números estão a multiplicar um pelo outro e aí o professor perguntará aos alunos de onde resultou o 5, prevendo que os alunos respondam da soma do 2 e do 3. O professor pedirá então aos alunos para que atentem novamente na expressão $a + b\sqrt{c}$ e perguntar-lhes-á se $\sqrt{c}$ está a multiplicar por a

$+ b$. O professor prevê que os alunos concluam que não e que faltam parênteses na expressão, concluindo que $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$. → Para a multiplicação, o professor pedirá aos alunos para observarem as multiplicações apresentadas no enunciado da questão e perguntar-lhes-á se conseguem identificar algum padrão no cálculo do resultado de cada multiplicação. O professor prevê que um dos alunos responda que se multiplicam os radicandos e se mantém o radical, e aí o professor perguntará aos alunos como escrevem isso a partir das raízes quadradas de a e de b, prevendo que os alunos obtenham o resultado pretendido. → Para a divisão, o professor pedirá aos alunos para observarem as divisões apresentadas no enunciado da questão e perguntar-lhes-á se conseguem identificar algum padrão no cálculo do resultado de cada divisão. O professor prevê que um dos alunos responda que se dividem os radicandos e se mantém o radical, e aí o professor perguntará aos alunos como escrevem isso usando as raízes quadradas de a e de b, prevendo que os alunos obtenham o resultado pretendido. → Em relação aos números que a, b e c podem ser, o professor dirá aos alunos que eles têm que indicar que tipos de números eles são em cada operação. Caso se trate de um radicando, o professor perguntará aos alunos se se pode calcular a raiz de qualquer número, prevendo que um deles responda que só se pode calcular a raiz de um número não negativo. Caso os alunos respondam de um número positivo, o professor perguntará se é possível calcular a raiz de zero, prevendo que um dos alunos responda que sim. No caso dos números a e b na adição, o professor perguntará aos alunos se a e b são quaisquer números, prevendo que eles respondam afirmativamente. O professor perguntará assim a que conjunto pertencem a e b, prevendo que um dos alunos responda que pertencem ao conjunto $\mathbb{R}$, e aí o professor pedirá aos alunos para que escrevam isso através de linguagem matemática, prevendo que eles escrevam corretamente. Em relação ao b na divisão, o professor prevê que os alunos reconheçam que b não pode ser negativo. O professor perguntará aos alunos se se pode dividir a por qualquer número, prevendo que um deles responda negativamente e conclua que na divisão, b tem de ser positivo, e que ambos escrevam isso em linguagem matemática correta. **(4) Discussão da tarefa com a turma.** Como as questões 1 e 3 apenas requerem a apresentação de uma resposta final, o professor escreverá as operações no quadro e depois pedirá a um aluno para que vá ao quadro e escreva a sua resposta. A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as respostas dos alunos. O professor escolherá assim um aluno que tinha apresentado uma resposta correta e que tenha mostrado mais dificuldades em trabalhar com números irracionais ao longo	11h00m - 11h15m

das aulas.

Após cada aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelos colegas ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada no quadro, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

Para as restantes questões, o professor pedirá a um aluno para que vá ao quadro e apresente a sua resposta. A seleção deste aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as respostas dos alunos. Caso tenha havido uma estratégia de resolução dominante, o professor selecionará um que tenha apresentado uma resolução deste tipo. Caso algum aluno apresente uma estratégia alternativa à estratégia dominante que permita garantir uma melhor compreensão por parte dos alunos à resolução da questão e da matéria, o professor selecioná-lo-á para que a apresente no quadro. O processo de esclarecimento de dúvidas será o mesmo que adotado nas questões 1 e 3.

11h25m - 11h30m

(5) Início do 2º tempo da aula: entrada dos alunos.

11h30m - 11h40m

(6) Conclusão da discussão da tarefa *Operações com números irracionais* com a turma.

A conclusão da discussão da tarefa *Operações com números irracionais* com a turma decorrerá segundo as mesmas condições descritas atrás.

11h40m - 11h45m

(7) Apresentação da tarefa *Números irracionais: operações e comparações*.

Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada *Números irracionais: operações e comparações* em que os alunos aplicarão os seus conhecimentos de operações com números irracionais na resolução de problemas.

O professor informará os alunos do tempo para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.

11h45m - 12h00m

(8) Trabalho autónomo dos alunos.

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que irão ao quadro apresentar uma proposta de resolução.

O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, nas eventuais dificuldades.

Resolução da alínea a):

$$\overline{HB} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) = \left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right) \text{ hm}$$

$$\overline{CE} = 3\sqrt{5} \text{ hm}$$

$$\text{Distância} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \left(6\sqrt{2} + 5\sqrt{5}\right) \text{ hm}$$

O Tomás percorreu $\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)$ hm.

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos saibam que para obter o comprimento de [*BC*], é necessário multiplicar o comprimento por 2, mas que não reconheçam a necessidade de utilizar os parênteses. Também se prevê que os alunos tenham dificuldade em compreender a noção de valor exato.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos o que sabem sobre o comprimento do segmento [*BC*], prevendo que um deles responda que é o dobro da largura e aí o professor perguntar-lhes-á a largura, prevendo que um deles responda $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. O professor perguntará aos alunos como se obtém assim o comprimento do segmento [*BC*], prevendo que um deles responda que se tem de multiplicar $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ por 2 e aí o professor pedirá aos alunos para que escrevam isso. Prevendo que os alunos apresentem uma expressão semelhante a $2\times\sqrt{2}+\sqrt{5}$, o professor perguntará aos alunos o que está a multiplicar por 2 na expressão que escreveram, prevendo que um deles responda $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. O professor perguntará aos alunos se não é apenas $\sqrt{2}$ que está a multiplicar por 2, prevendo que um deles responda afirmativamente e aí o professor perguntará aos alunos o que é necessário para que esteja $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ a multiplicar por 2. O professor prevê que os alunos têm que escrever $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ entre parênteses e depois o professor perguntará aos alunos como fazem o produto entre os fatores apresentados, prevendo que um deles responda que tem que se fazer a propriedade distributiva da multiplicação.

Prevendo que os alunos apresentem um valor aproximado ou arredondado do resultado final após terem recorrido à calculadora, o professor perguntará aos alunos porque é que esse é o valor exato da distância percorrida pelo Tomás. Caso nenhum dos alunos saiba apresentar uma resposta, o professor dirá aos alunos que o valor é exato quando não é aproximado, nem arredondado. O professor prevê assim que os alunos reconheçam que o valor exato da distância percorrida pelo Tomás é $(6\sqrt{2}+5\sqrt{5})$ cm.

Resolução da alínea b):

Distância percorrida pelo Tomás: $\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)$ hm

$\overline{HB}=4\sqrt{2}$ hm

$\overline{BG}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ hm

$\overline{GF}=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)$ hm

$\overline{FC}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ hm

Distância percorrida pelo Lourenço:

$$4\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5}=\left(8\sqrt{2}+4\sqrt{5}\right)\text{ hm}$$

Diferença entre as distâncias percorridas:

$$\begin{aligned}8\sqrt{2}+4\sqrt{5}-\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)&=8\sqrt{2}+4\sqrt{5}-6\sqrt{2}-5\sqrt{5}\\&=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\text{ hm}\end{aligned}$$

Foi o Lourenço que correu mais.

Notas quanto à resolução: em relação ao cálculo do valor exato da diferença entre as distâncias percorridas pelo Lourenço e pelo Tomás, os alunos também podem optar por subtrair a distância percorrida pelo Lourenço à do Tomás, obtendo assim o simétrico do valor apresentado na resolução atrás.

Em relação à resposta à questão de qual dos dois correu mais, existem várias possíveis respostas: que o percurso do Lourenço é mais longo do que o do Tomás, ou que a diferença entre a distância percorrida do Lourenço e a do Tomás é positiva, ou os alunos podem ir à calculadora obter os valores das distâncias percorridas e ao compararem-nos, concluem que foi o Lourenço que correu mais.

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos não tenham dificuldades em obter o comprimento do segmento [*GF*], pois prevê-se que não tinham apresentado essas dificuldades na alínea a) ou se tinha, viram-se apoiados pelo professor.

Não se prevê que os alunos tenham dificuldades em determinar a distância percorrida pelo Lourenço pelos mesmos motivos que os alunos não tiveram dificuldades em obter o comprimento do segmento [*GF*].

Prevê-se que os alunos tenham dificuldades em escolher o aditivo e o subtrativo para determinar a diferença entre as distâncias percorridas. O professor também prevê que os alunos tenham dificuldades em calcular a diferença por não verem a necessidade de colocar os parênteses como mostra a resolução apresentada atrás.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: como se prevê que os alunos já tenham os valores exatos das distâncias percorridas pelo Tomás e pelo Lourenço, o professor perguntará então se conseguem identificar qual dos valores é maior. O professor prevê que um dos alunos vá à calculadora e identifique assim que foi o Lourenço que percorreu a maior distância. O professor prevê assim que os alunos identifiquem que o Lourenço percorreu a maior distância e depois o professor perguntará aos alunos como devem fazer a diferença entre as distâncias percorridas. O professor prevê que um dos alunos deve subtrair a distância do Tomás à distância do Lourenço.

Quanto ao cálculo da diferença, o professor pedirá para escreverem a diferença entre as distâncias percorridas. Prevendo que os alunos apresentem uma expressão semelhante a $8\sqrt{2}+4\sqrt{5}-6\sqrt{2}+5\sqrt{5}$, o professor perguntará aos alunos qual é o subtrativo, prevendo que um deles responda $6\sqrt{2}+5\sqrt{5}$. O professor perguntará aos alunos se o subtrativo não é apenas $6\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda afirmativamente e aí o professor perguntará aos alunos o que é necessário para que o subtrativo esteja $6\sqrt{2}+5\sqrt{5}$. O professor prevê que os alunos respondam que têm que escrever $6\sqrt{2}+5\sqrt{5}$ entre parênteses e depois o professor perguntará aos alunos o que acontecerá quando tirarem os parênteses, prevendo que um deles responda que o sinal de (–) muda o sinal da expressão que está dentro de parênteses. O professor prevê que os alunos saibam obter o resultado final da diferença.

Resolução da alínea c): $A = c \times l$ $A = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{5}) =$ $= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} + 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ $= 2\sqrt{4} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{25}$ $= 2 \times 2 + 4\sqrt{10} + 2 \times 5$ $= 14 + 4\sqrt{10}$ A área do retângulo $[BCFG]$ é igual a $(14 + 4\sqrt{10})$ hm^2. Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades em identificar as dimensões do retângulo ou em efetuarem as operações que estão na resolução apresentada. Prevê-se que os alunos mostrem dificuldades em reconhecer a necessidade de colocar os parênteses como se apresentam na resolução. Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor pedirá para escreverem a expressão que dá a área do retângulo [*BCFG*]. Prevendo que os alunos apresentem uma expressão semelhante a $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \times 2 + \sqrt{5}$, o professor perguntará aos alunos qual é o comprimento e qual é a largura, prevendo que um dos alunos responda que o comprimento é $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ e que a largura é $\sqrt{2} + \sqrt{5}$. Aí, o professor perguntará aos alunos qual o multiplicando e qual o multiplicador, prevendo que um deles responda que o multiplicando é $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ e o multiplicador é $\sqrt{2} + \sqrt{5}$. Então, o professor perguntará aos alunos se não é apenas $2\sqrt{5}$ que está a multiplicar por $\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda afirmativamente e aí o professor perguntará aos alunos o que é necessário para que esteja $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ a multiplicar por $\sqrt{2} + \sqrt{5}$. O professor prevê que os alunos têm que escrever $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ e $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ entre parênteses e depois efetuem a multiplicação corretamente. **(9) Discussão da tarefa *Números irracionais: operações e comparações* com a turma.** O professor pedirá a um aluno para que vá ao quadro e apresente a sua resolução da alínea a). A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as resoluções dos alunos. Como se previu que a resolução seria única, o professor a seleção do aluno basear-se-á nas dificuldades que tem revelado no seu trabalho nas tarefas envolvendo operações com números irracionais, assim como o que tem desenvolvido ao longo das aulas aquando da lecionação de números irracionais. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada no quadro, o professor pedirá ao aluno que a apresentou	12h00m - 12h15m

para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá. O processo de seleção do aluno, de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo para as alíneas b) e c). Para a discussão de qualquer uma das alíneas, o professor invocará respostas erradas ou dúvidas que tenha observado durante o trabalho autónomo dos alunos que possam contribuir para as suas aprendizagens, maximizar os seus conhecimentos acerca dos números irracionais e evitar que cometam erros frequentes no futuro.	

NOTAS

Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto, mas caso sobre tempo, serão considerados os seguintes exercícios do 2º volume do manual PI8 para os alunos resolverem:

3 Mostra que $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ é um número inteiro.

6 Mostra que $\sqrt{5}$ é solução da equação $3x^2-5x-15+5\sqrt{5}=0$.

Simplifica cada uma das seguintes expressões.

8.1. $2\left(\sqrt{3}-1\right)+4\sqrt{3}$

8.2. $\left(\sqrt{7}-2\right)^2-4\sqrt{7}+1$

8.3. $2(4\pi-6)-\pi+5$

8.4. $\left(\sqrt{6}-3\right)\left(\sqrt{6}+3\right)-\dfrac{\sqrt{6}+4}{2}$

8.5. $3\left(\sqrt{5}-2\right)+3\sqrt{5}-\sqrt{2}$

8.6. $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{3}+1$

8.7. $\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2+4$

8.8. $\left(2\sqrt{3}-1\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2$

O número de alíneas a escolher para os alunos dependerá do tempo que restar da aula e a escolha das alíneas dependerá da compreensão e das dificuldades que os alunos revelaram durante o trabalho autónomo e a discussão das fichas que trabalharam durante esta aula.

Plano de Aula 8

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO
PLANO DE AULA
ANO LETIVO 2016-2017

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Data e Hora	31 de março de 2017 das 10h25m às 11h15m
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais

Tópicos, Noções e Conceitos	• Operações com números irracionais, especificamente raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos
Sumário	Conclusão da resolução da tarefa *Números irracionais: operações e comparações*. Realização de um miniteste.
Objetivos Específicos de Aprendizagem	Esta aula tem como objetivo a revisão das operações com números irracionais por meio da resolução de um problema.
Capacidades Transversais	• Comunicação matemática • Interpretação de problemas
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Operações com números racionais • Propriedade da dupla distributividade da multiplicação • Fórmula da área do retângulo
Recursos	**Professor**: Planificação da aula **Alunos**: Ficha de trabalho e material de escrita
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.

METODOLOGIA DE TRABALHO

Nesta aula, serão atribuídos 10 minutos para os alunos continuarem e concluírem a resolução da tarefa *Números irracionais: operações e comparações*. Os alunos resolverão a ficha a pares e o professor informá-los-á do tempo para concluírem a resolução da tarefa. Serão devolvidas aos alunos as resoluções da tarefa referida que os alunos realizaram na aula de 30 de março. Antes da discussão da tarefa em grande grupo, o professor recolherá uma das folhas contendo a resolução de cada par.

Após o trabalho autónomo dos alunos, seguir-se-á a discussão da tarefa em grande grupo.

Finda a discussão da tarefa, o professor distribuirá o enunciado do miniteste que os alunos resolverão autonomamente a par, sendo este o método adotado na turma aquando da resolução de minitestes.

MOMENTOS DA AULA

(1) Início da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Trabalho autónomo dos alunos.	10h30m - 10h40m
(3) Discussão da tarefa *Números irracionais: operações e comparações* com a turma.	10h40m - 10h55m
(4) Entrega e resolução do miniteste.	10h55m - 11h15m

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(1) Início da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro. 10h25m - 10h30m

(2) Trabalho autónomo dos alunos. 10h30m - 10h40m

O professor informará os alunos do tempo para concluírem a resolução da tarefa *Números irracionais: operações e comparações*, e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades.

O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que irão ao quadro apresentar uma proposta de resolução.

O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, nas eventuais dificuldades.

Resolução da alínea a):

$\overline{HB} = 4\sqrt{2}$

$\overline{BC} = 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) = \left(2\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)$ hm

$\overline{CE} = 3\sqrt{5}$ hm

Distância $= 4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+3\sqrt{5} = \left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)$ hm

O Tomás percorreu $\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)$ hm.

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos saibam que para obter o comprimento de $[BC]$, é necessário multiplicar o comprimento por 2, mas que não reconheçam a necessidade de utilizar os parênteses. Também se prevê que os alunos tenham dificuldade em compreender a noção de valor exato.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos o que sabem sobre o comprimento do segmento $[BC]$, prevendo que um deles responda que é o dobro da largura e aí o professor perguntar-lhes-á a largura, prevendo que um deles responda $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. O professor perguntará aos alunos como se obtém assim o comprimento do segmento $[BC]$, prevendo que um deles responda que se tem de multiplicar $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ por 2 e aí o professor pedirá aos alunos para que escrevam isso. Prevendo que os alunos apresentem uma expressão semelhante a $2\times\sqrt{2}+\sqrt{5}$, o professor perguntará aos alunos o que está a multiplicar por 2 na expressão que escreveram, prevendo que um deles responda $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. O professor perguntará aos alunos se não é apenas $\sqrt{2}$ que está a multiplicar por 2, prevendo que um deles responda afirmativamente e aí o professor perguntará aos alunos o que é necessário para que esteja $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ a multiplicar por 2. O professor prevê que os alunos têm que escrever $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ entre parênteses e depois o professor perguntará aos alunos como fazem o produto entre os fatores apresentados, prevendo que um deles responda que tem que se fazer a propriedade distributiva da multiplicação.

Prevendo que os alunos apresentem um valor aproximado ou arredondado do resultado final após terem recorrido à calculadora, o professor perguntará aos alunos porque é que esse é o valor exato da distância percorrida pelo Tomás. Caso nenhum dos alunos saiba apresentar uma resposta, o professor dirá aos alunos que o valor é exato quando não é aproximado, nem arredondado. O professor prevê assim que os alunos reconheçam que o valor exato da distância percorrida pelo Tomás é $(6\sqrt{2}+5\sqrt{5})$ cm.

Resolução da alínea b):

Distância percorrida pelo Tomás: $\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)$ hm

$\overline{HB} = 4\sqrt{2}$ hm

$\overline{BG} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ hm

$\overline{GF} = 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) = \left(2\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)$ hm

$\overline{FC} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ hm

Distância percorrida pelo Lourenço:

$$4\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5} = \left(8\sqrt{2}+4\sqrt{5}\right) \text{ hm}$$

Diferença entre as distâncias percorridas:

$$\begin{aligned} 8\sqrt{2}+4\sqrt{5}-\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right) &= 8\sqrt{2}+4\sqrt{5}-6\sqrt{2}-5\sqrt{5} \\ &= \left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right) \text{ hm} \end{aligned}$$

Foi o Lourenço que correu mais.

Notas quanto à resolução: em relação ao cálculo do valor exato da diferença entre as distâncias percorridas pelo Lourenço e pelo Tomás, os alunos também podem optar por subtrair a distância percorrida pelo Lourenço à do Tomás, obtendo assim o simétrico do valor apresentado na resolução atrás.

Em relação à resposta à questão de qual dos dois correu mais, existem várias possíveis respostas: que o percurso do Lourenço é mais longo do que o do Tomás, ou que a diferença entre a distância percorrida do Lourenço e a do Tomás é positiva, ou os alunos podem ir à calculadora obter os valores das distâncias percorridas e ao compararem-nos, concluem que foi o Lourenço que correu mais.

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos não tenham dificuldades em obter o comprimento do segmento [*GF*], pois prevê-se que não tinham apresentado essas dificuldades na alínea a) ou se tinha, viram-se apoiados pelo professor.

Não se prevê que os alunos tenham dificuldades em determinar a distância percorrida pelo Lourenço pelos mesmos motivos que os alunos não tiveram dificuldades em obter o comprimento do segmento [*GF*].

Prevê-se que os alunos tenham dificuldades em escolher o aditivo e o subtrativo para determinar a diferença entre as distâncias percorridas. O professor também prevê que os alunos tenham dificuldades em calcular a diferença por não verem a necessidade de colocar os parênteses como mostra a resolução apresentada atrás.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: como se prevê que os alunos já tenham os valores exatos das distâncias percorridas pelo Tomás e pelo Lourenço, o professor perguntará então se conseguem identificar qual dos valores é maior. O professor prevê que um dos alunos vá à calculadora e identifique assim que foi o Lourenço que percorreu a maior distância. O professor prevê assim que os alunos identifiquem que o Lourenço percorreu a maior distância e depois o professor perguntará aos alunos como devem fazer a diferença entre as distâncias percorridas. O professor prevê que um dos alunos deve subtrair a distância do Tomás à distância do Lourenço.

Quanto ao cálculo da diferença, o professor pedirá para escreverem a diferença entre as distâncias percorridas. Prevendo que os alunos apresentem uma expressão semelhante a $8\sqrt{2}+4\sqrt{5}-6\sqrt{2}+5\sqrt{5}$, o professor perguntará aos alunos qual é o subtrativo, prevendo que um deles responda $6\sqrt{2}+5\sqrt{5}$. O professor perguntará aos alunos se o subtrativo não é apenas $6\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda afirmativamente e aí o professor perguntará aos alunos o que é necessário para que o subtrativo esteja $6\sqrt{2}+5\sqrt{5}$. O professor prevê que os alunos respondam que têm que escrever $6\sqrt{2}+5\sqrt{5}$ entre parênteses e depois o professor perguntará aos alunos o que acontecerá quando tirarem os parênteses, prevendo que um deles responda que o sinal de (–) muda o sinal da expressão que está dentro de parênteses. O professor prevê que os alunos saibam obter o resultado final da diferença.

Resolução da alínea c):

$$A = c \times l$$

$$\begin{aligned} A &= \left(2\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) = \\ &= 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times\sqrt{5}+2\sqrt{5}\times\sqrt{2}+2\sqrt{5}\times\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{4}+2\sqrt{10}+2\sqrt{10}+2\sqrt{25} \\ &= 2\times 2+4\sqrt{10}+2\times 5 \\ &= 14+4\sqrt{10} \end{aligned}$$

A área do retângulo $[BCFG]$ é igual a $\left(14+4\sqrt{10}\right)$ hm^2.

Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades em identificar as dimensões do retângulo ou em efetuarem as operações que estão na resolução apresentada. Prevê-se que os alunos mostrem dificuldades em reconhecer a necessidade de colocar os parênteses como se apresentam na resolução.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor pedirá para escreverem a expressão que dá a área do retângulo $[BCFG]$. Prevendo que os alunos apresentem uma expressão semelhante a $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}\times 2+\sqrt{5}$, o professor perguntará aos alunos qual é o comprimento e qual é a largura, prevendo que um dos alunos responda que o comprimento é $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ e que a largura é $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Aí, o professor perguntará aos alunos qual o multiplicando e qual o multiplicador, prevendo que um deles responda que

o multiplicando é $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ e o multiplicador é $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Então, o professor perguntará aos alunos se não é apenas $2\sqrt{5}$ que está a multiplicar por $\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda afirmativamente e aí o professor perguntará aos alunos o que é necessário para que esteja $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ a multiplicar por $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. O professor prevê que os alunos têm que escrever $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ entre parênteses e depois efetuem a multiplicação corretamente.	
(3) Discussão da tarefa *Números irracionais: operações e comparações* com a turma. O professor pedirá a um aluno para que vá ao quadro e apresente a sua resolução da alínea a). A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as resoluções dos alunos. Como se previu que a resolução seria única, o professor a seleção do aluno basear-se-á nas dificuldades que tem revelado no seu trabalho nas tarefas envolvendo operações com números irracionais, assim como o que tem desenvolvido ao longo das aulas aquando da lecionação de números irracionais. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada no quadro, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá. O processo de seleção do aluno, de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo para as alíneas b) e c). Para a discussão de qualquer uma das alíneas, o professor invocará respostas erradas ou dúvidas que tenha observado durante o trabalho autónomo dos alunos que possam contribuir para as suas aprendizagens, maximizar os seus conhecimentos acerca dos números irracionais e evitar que cometam erros frequentes no futuro.	10h40m - 10h55m
(4) Entrega e resolução do miniteste. O professor distribuirá por mesa um enunciado do miniteste em que os alunos resolvê-lo-ão aos pares. O professor prestará aos alunos todos os esclarecimentos possíveis em relação ao enunciado das questões do miniteste caso surjam dúvidas. O miniteste terá a duração de 15 minutos e começará às 11h00m. Os alunos terão até ao toque de saída para entregar a resolução do miniteste.	10h55m - 11h15m

NOTAS
Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto, mas caso sobre

tempo, serão considerados os seguintes exercícios do 2º volume do manual PI8, pela ordem considerada, para os alunos resolverem:

3 Mostra que $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ é um número inteiro.

6 Mostra que $\sqrt{5}$ é solução da equação $3x^2-5x-15+5\sqrt{5}=0$.

Plano de Aula 9

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO PLANO DE AULA ANO LETIVO 2016-2017	AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Data e Hora	20 de abril de 2017 das 10h25m às 12h15m
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais
Tópicos, Noções e Conceitos	• Comparação de números em forma de dízima • Números irracionais e relações de ordem • Números irracionais e a reta real
Sumário	Resolução de duas fichas de trabalho sobre as relações de ordem envolvendo números irracionais.
Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Saber comparar números em forma de dízima. **2.** Saber enquadrar um número irracional entre duas dízimas finitas. **3.** Saber encontrar números racionais e irracionais entre dois números reais. **4.** Saber ordenar números irracionais na forma de raiz quadrada. **5.** Reconhecer que uma raiz quadrada positiva é maior que outra quando o radicando da primeira é maior que o da segunda. **6.** Reconhecer que uma raiz quadrada negativa é maior que outra quando o radicando da primeira é menor que o da segunda. **7.** Reconhecer que entre dois números racionais existem infinitos números irracionais. **8.** Reconhecer que entre dois números irracionais existem infinitos números irracionais.
Capacidades Transversais	• Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Estabelecimento de conexões
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Número racional • Número irracional • Dízimas finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas • Operações com números reais • Relações de ordem com números racionais

Recursos	**Professor**	Planificação da aula
	Alunos	Fichas de trabalho e material de escrita
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.	

METODOLOGIA DE TRABALHO

Nesta aula, serão abordadas as relações de ordem envolvendo números irracionais.

Os alunos realizarão duas fichas de trabalho: a primeira intitulada *Números irracionais e relações de ordem* e a segunda *Números reais, operações e relações de ordem*. O professor pedirá aos alunos para resolverem as fichas autonomamente a pares e informá-los-á do tempo que têm para as resolver. Em cada mesa serão entregues dois enunciados da tarefa, um dos enunciados contendo a resolução de cada par será entregue ao professor antes da discussão da tarefa no âmbito do estudo em curso.

Após cada momento do trabalho autónomo dos alunos de cada tarefa, seguir-se-á a sua discussão em grande grupo.

MOMENTOS DA AULA

(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Apresentação da tarefa *Números irracionais e relações de ordem*.	10h30m - 10h35m
(3) Trabalho autónomo dos alunos.	10h35m - 10h55m
(4) Discussão da tarefa *Números irracionais e relações de ordem* com a turma.	10h55m - 11h15m
(5) Início do 2º tempo da aula: entrada dos alunos.	11h25m - 11h30m
(6) Apresentação da tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem*.	11h30m - 11h35m
(7) Trabalho autónomo dos alunos.	11h35m - 11h55m
(8) Discussão da tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem* com a turma.	11h55m - 12h15m

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(1) Início do 1º tempo da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	10h25m - 10h30m
(2) Apresentação da tarefa *Números irracionais e relações de ordem*. Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada *Números irracionais e relações de ordem* para que os alunos comparem números em forma de dízima, procurem enquadrar números irracionais entre dois números em forma de dízima finita e obtenham números racionais e números irracionais entre dois números reais, fazendo ao mesmo tempo uma revisão das várias representações dos números racionais e irracionais.	10h30m - 10h35m

O professor informará os alunos do tempo que têm para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa. **(3) Trabalho autónomo dos alunos.** O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que irão ao quadro apresentar uma proposta de resolução. O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, nas eventuais dificuldades. **Resolução da Questão 1:** **a)** Verdadeira. **b)** Falsa, porque 14,(50) = 14,505050…, que é maior que 14,5. **c)** Falsa, porque – 6,(256) = – 6,256256…, que é menor que – 6,255. **d)** Verdadeira. **e)** Falsa, porque os números são dízimas infinitas não periódicas e como não se sabe os algarismos que procedem aqueles que se apresentam, não é possível afirmar que os dois números são iguais. Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos não façam a leitura correta dos números apresentados, conduzindo-os a comparações incorretas. Por exemplo, prevê-se que os alunos afirmem que a frase da alínea a) é falsa, porque o número 2,4(8) é igual a 2,48888… e 48888… é maior que 5. Prevê-se que alguns alunos demonstrem esta dificuldade na alínea b). Na alínea c), prevê-se que os alunos respondam incorretamente, afirmando que – 6,255 é menor que – 6,(256), por 255 ser menor que 256, não tendo em conta que os números são negativos. Na alínea e), prevê-se que os alunos respondam que a afirmação é verdadeira porque como ambas as dízimas são iguais até à sexta casa decimal, então serão iguais a partir da sexta casa decimal. Ação do professor face às dificuldades dos alunos: para a alínea a) o professor perguntará aos alunos se conseguem escrever 2,4(8) sem os parênteses, prevendo que respondam afirmativamente e que o façam corretamente. O professor pedirá depois aos alunos para que tentem comparar os números agora com a nova representação de um deles. Caso não consigam ou apresentem uma resposta incorreta, o professor perguntará aos alunos como é que se comparam números na forma decimal. Caso não consigam responder ou apresentem uma resposta incorreta, o professor apresentará os números 1,234 e 1,235, e perguntará aos alunos qual é maior, prevendo que respondam 1,235. O professor perguntará porquê, prevendo que os dois alunos respondam porque 5 é maior que 4 e aí o professor perguntar-lhes-á porque é que foram comparar o 4 e o 5 e não um dos restantes números. O professor prevê que os alunos respondam porque	 10h35m - 10h55m

são iguais até ao momento em que se compara a ordem das milésimas de cada número. O professor pedirá aos alunos para compararem a parte inteira dos números, prevendo que um deles responda que são iguais e depois o professor pedirá o mesmo para a ordem das décimas, prevendo que um deles responda que 5 é maior que 4 e assim concluam que 2,5 é maior que 2,4(8) e que a afirmação é verdadeira. Caso os alunos apresentem dificuldades na comparação dos pares de números das restantes alíneas, o professor recorrerá a esta estratégia para os apoiar.

Para a alínea c), o professor perguntará aos alunos onde se localiza – 6,(256) em relação ao número – 6,255 na reta real, prevendo que um deles responda que o primeiro se localiza à esquerda do segundo e concluam que – 6,255 é maior que – 6,(256) e a afirmação é falsa.

Para a alínea e), o professor perguntará aos alunos o tipo de dízima que os números representam, prevendo que um deles responda que é uma dízima infinita não periódica. O professor perguntará assim aos alunos o que podem dizer sobre a parte decimal de cada um dos números, prevendo que um deles responda que é impossível saber os algarismos que procedem ao 7, ou uma resposta semelhante. O professor perguntará depois aos alunos se os algarismos que vêm depois do algarismo 7 são iguais em ambos os números, prevendo que um deles responda que não se sabe ou uma resposta semelhante. O professor perguntará então aos alunos se podem concluir que os dois números são iguais, prevendo que um deles responda negativamente e os alunos concluam assim que a afirmação é falsa.

Resolução da Questão 2:

Número	Enquadramento 1	Enquadramento 2
π	$3{,}1 < \pi < 3{,}2$	$3{,}14 < \pi < 3{,}15$
$\sqrt{5}$	$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$	$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$
$1 - 2\sqrt{3}$	$-2{,}5 < 1 - 2\sqrt{3} < -2{,}4$	$-2{,}47 < 1 - 2\sqrt{3} < -2{,}46$

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos não compreendam o que lhes é pedido para fazer no exercício. Também se prevê que alguns alunos não procurem escrever os limites inferior e superior mais próximos dos números que lhes são apresentados.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: caso os alunos não compreendam o que lhes é pedido, o professor informará os alunos que têm de escrever os números da primeira coluna entre dois números escritos na forma decimal. O professor pedirá aos alunos que observem os dois enquadramentos e perguntar-lhes-á qual a diferença entre os limites do primeiro e do segundo, prevendo que um dos alunos responda que no primeiro enquadramento, os limites são números com uma casa decimal e no segundo têm duas casas decimais.

O professor pedirá aos alunos para indicarem um valor arredondado de π, prevendo que um deles responda 3,14 e aí o professor pedirá aos alunos para olharem para o 1º enquadramento do π e perguntar-lhes-á se π está entre 3,1 e 3,2, prevendo que um deles responda afirmativamente. O professor depois pedirá aos alunos para que apresentem um valor arredondado de $\sqrt{5}$, prevendo que um deles recorra à calculadora e responda 2,236. O professor depois perguntará aos alunos entre que números está 2,236 escrito, prevendo que um dos alunos responda entre 2,2 e 2,3. Também se prevê que os alunos já consigam fazer os restantes enquadramentos.

Resolução da Questão 3:

a) Números racionais: 4,5 e 5.
Números irracionais: $\sqrt{20}$ e $\sqrt{23}$

b) Números racionais: 5,1 e 5,2.
Números irracionais: $\sqrt{28}$ e 5,12345….

c) Números racionais: 0 e 1.
Números irracionais: $\sqrt{2}$ e π.

Notas quanto à resolução: tendo em conta o caráter exploratório desta alínea, o professor prevê que sejam apresentadas respostas diferentes da exemplificada acima.

Dificuldades previstas: prevê-se que os alunos tenham dificuldades em encontrar números racionais e números irracionais por falta de consolidação da noção destes dois tipos de números.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: em qualquer das situações, o professor pedirá aos alunos para que recordem as representações de números racionais e de números irracionais. No caso de número racional, prevê-se que um dos alunos responda que é um número que se pode escrever na forma de fração. O professor perguntará então aos alunos que tipo de número o resultado dessa fração pode dar caso se efetue a divisão, prevendo que um dos alunos responda que pode dar um número inteiro ou uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica. No caso de número irracional, o professor prevê que um dos alunos responda que se pode representar por uma dízima infinita não periódica.

O professor prevê que os alunos consigam apresentar dois números racionais e dois números irracionais na alínea 3.1., assim que as noções destes dois tipos de números estejam recordadas. Caso o mesmo não aconteça nas restantes alíneas, o professor pedirá aos alunos para que obtenham um valor aproximado dos números irracionais que se apresentam em cada alínea, prevendo que os alunos consigam assim resolver as alíneas.

Resolução da Questão 4:

a) A afirmação é verdadeira, porque se selecionarmos dois números racionais, como o 5 e o 6 da alínea b) da questão 3, verificamos que existem infinitos números irracionais:

5,123456789101112…
5,2345678910111213…
5,34567891011121314…

b) A afirmação é falsa, porque se considerarmos os dois números da alínea c) da questão 3: $-\sqrt{15}$ e 2π, verificamos que existe mais do que um número irracional: $-\sqrt{14}$, $-\sqrt{13}$, $\sqrt{3}$, π, entre outros. Notas quanto à resolução: tendo em conta o caráter exploratório desta alínea, o professor prevê que sejam apresentadas respostas diferentes da exemplificada acima. Dificuldades previstas: prevê-se que alguns alunos não consigam apresentar uma resposta tendo em conta o caráter exploratório. Ação do professor face às dificuldades dos alunos: para a alínea a), o professor perguntará aos alunos que indiquem dois números racionais, prevendo que um deles o faça corretamente. A seguir, o professor perguntará aos alunos das dízimas que conhecem, quais é que representam números irracionais, prevendo que um deles responda as dízimas infinitas não periódicas. O professor perguntará aos alunos se conseguem dar exemplos de dízimas infinitas não periódicas entre os números racionais que sugeriram, prevendo que respondam afirmativamente e o façam corretamente. O professor perguntará depois aos alunos quantos números irracionais existem entre os dois números racionais que apresentaram, prevendo que um deles responda infinitas e que os alunos concluam que a afirmação é verdadeira. Para a alínea b), o professor pedirá aos alunos para observarem o trabalho que realizaram na questão 3 e que vejam se em alguma das alíneas havia um par de números irracionais.	
(4) Discussão da tarefa com a turma. Para a questão 1, o professor pedirá a um aluno para que responda a cada alínea oralmente e explique a sua resposta. A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as respostas dos alunos. O professor escolherá assim um aluno que tinha apresentado uma resposta correta e que tenha mostrado mais dificuldades em trabalhar com números irracionais ao longo das aulas. Após cada aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que o colega disse ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Caso seja necessário, o professor pedirá ao aluno que esclarecerá o colega para se deslocar ao quadro e apresentar a sua explicação. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá. Para a questão 2, o professor projetará a tabela e pedirá a um aluno que se desloque ao quadro e preencha um dos retângulos. A seleção dos alunos é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as respostas dos alunos. O professor escolherá assim um aluno que tinha apresentado uma resposta correta e que tenha	10h55m - 11h15m

mostrado mais dificuldades em trabalhar com números irracionais ao longo das aulas. Após cada aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que o colega disse ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

Para cada alínea da questão 3, o professor pedirá a um aluno que indique dois números racionais e a outro para que indique dois números irracionais. Os processos de seleção do aluno e do esclarecimento de dúvidas serão os mesmo que adotados na discussão da questão 2.

Após o esclarecimento de dúvidas da questão 3, o professor perguntará aos alunos que outros números, racionais e irracionais, podiam ter sido apresentados na resolução. Este ato terá lugar caso tenha sido apresentada uma reduzida variedade de números. Em relação aos números racionais, caso só tenham sido apresentados números na forma decimal, o professor perguntará aos alunos se existiriam outros números que não fossem decimais. O professor prevê que os alunos respondam números inteiros e assim pedir-lhes-á que deem exemplo de um número inteiro que sirva de resposta para a alínea 3.2, prevendo que um dos alunos apresente uma resposta correta. O professor depois perguntará aos alunos que apresentem um número que não esteja na forma decimal, nem inteiro e que sirva de resposta para a alínea 3.1., prevendo que um dos alunos responda um número na forma de fração. Em relação aos números irracionais, caso só tenham sido apresentados números na forma decimal, o professor perguntará aos alunos se existiriam outros números que não estivessem na forma decimal, prevendo que um deles responda um número na forma de raiz quadrada. O professor pedirá um exemplo que sirva de resposta para a alínea 3.3., prevendo que um dos alunos apresente uma resposta correta. O professor perguntará depois aos alunos se haveria outro número irracional que servisse de resposta para a alínea 3.3. e que não estivesse representado na forma decimal, não estivesse escrito na forma de raiz quadrada, e também destacaria no quadro o número 2π, prevendo que um deles responda o número π. Caso surjam dúvidas por parte dos alunos, o processo de esclarecimento será o mesmo que adotado nas questões anteriores.

Para a alínea e), o professor pedirá a um aluno que se vá ao quadro e apresente a sua resposta. O professor terá observado as respostas apresentadas pelos alunos durante o trabalho autónomo e selecionará um aluno que possa apresentar uma resposta correta e permita aos alunos refletir sobre a sua veracidade e se existe forma de completar mais a resposta ou até apresentar uma justificação diferente, correta e completa. Pretende-se que seja obtida uma resposta o mais completa e consensual possível entre a turma. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi dito ou se têm uma resposta diferente ou se têm alguma dúvida. O processo para esclarecer um aluno que discorde da resposta ou tenha dúvidas será o mesmo que adotado nas questões anteriores.

Para a discussão de qualquer uma das questões, o professor invocará respostas erradas ou dúvidas que tenha observado durante o trabalho autónomo dos alunos que possam contribuir para as suas aprendizagens, maximizar os seus conhecimentos acerca dos números irracionais e evitar que cometam erros frequentes no futuro.

11h25m - 11h30m

(5) Início do 2º tempo da aula: entrada dos alunos.

11h30m - 11h35m

(6) Apresentação da tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem*.

Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada *Números irracionais, operações e relações de ordem* em que os alunos estudarão as relações de ordem com números na forma de raiz quadrada. Esta tarefa será resolvida sem acesso à calculadora.

O professor informará os alunos do tempo para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.

11h35m - 11h55m

(7) Trabalho autónomo dos alunos.

O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que irão ao quadro apresentar uma proposta de resolução.

O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, nas eventuais dificuldades.

Resolução da Questão 1:

1.1. $-\sqrt{24} < -\sqrt{13} < -\sqrt{7} < \sqrt{5} < \sqrt{14} < \sqrt{19}$

1.2. $\sqrt{a}$ é maior que $\sqrt{b}$ quando a é maior que b.

1.3. $-\sqrt{a}$ é maior que $-\sqrt{b}$ quando a é menor que b.

Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades na resolução da alínea 1.1. Prevê-se que os alunos tenham dificuldades nas alíneas 1.2. e 1.3. devido à representação simbólica utilizada no enunciado.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor pedirá aos alunos para que olhem para a resolução que apresentaram na alínea 1.1. e para que indiquem quando é que a raiz quadrada positiva de um número é maior que outra.

Caso os alunos não consigam fazer a conexão entre as duas alíneas, o professor pedirá aos alunos para que indiquem duas raízes quadradas positivas. Prevê-se que um dos alunos escolha duas raízes positivas do conjunto *M*, como por exemplo, $\sqrt{14}$ e $\sqrt{19}$. O professor perguntará então aos alunos qual das raízes é maior, prevendo que um dos alunos responda $\sqrt{19}$. Depois, o professor pedirá aos alunos para que apresentem outras duas raízes quadradas positivas e a seguir perguntar-lhes-á qual é maior, prevendo que um deles o consiga fazer corretamente. Depois, o professor perguntará aos alunos o que notam nos radicandos das duas raízes quadradas positivas quando dizem que uma é maior que a outra. O professor prevê que um dos alunos responda assim que uma raiz quadrada positiva é maior que a outra quando o seu radicando é maior que o da outra. O professor depois perguntará aos alunos quando é que $\sqrt{a}$ é maior que $\sqrt{b}$, prevendo que um dos alunos responda quando a é maior que b.

Caso os alunos mostrem dificuldades na alínea 1.3., o professor repetirá o processo que utilizou na alínea 1.2.

Resolução da alínea 2.1.:

$$A \hookrightarrow -\sqrt{12} \qquad C \hookrightarrow -\sqrt{5} \qquad E \hookrightarrow \pi$$
$$B \hookrightarrow -\sqrt{10} \qquad D \hookrightarrow \sqrt{7} \qquad F \hookrightarrow \sqrt{28}$$

Notas quanto à resolução: não se prevê que os alunos apresentem uma resolução com a mesma representação que a exemplificada, mas sim que indiquem as respetivas abcissas na reta apresentada no enunciado.

Prevê-se que alguns alunos tentem obter valores aproximados dos números do conjunto M recorrendo ao cálculo mental. Também se prevê que alguns alunos comparem os números com base no trabalho que fizeram na questão 1.

Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades em indicar a abcissa do ponto E. Apesar de se prever que os alunos não tenham dificuldades em comparar as raízes quadradas, prevê-se que tenham em transpor essa relação para a reta real.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor perguntará aos alunos quando têm dois números na reta real onde se situa o menor em relação ao outro, prevendo que um deles responda que o menor se localiza antes do maior. O professor pedirá então aos alunos para que observem o trabalho que realizaram na questão 1 e depois perguntar-lhes-á qual é o menor número do conjunto M, prevendo que um deles responda $-\sqrt{12}$, e depois perguntar-lhes-á qual o ponto que tem essa abcissa, prevendo que um deles responda o ponto A. O professor depois perguntará aos alunos qual o menor número do conjunto M, sem contar com $-\sqrt{12}$, prevendo que um deles responda $-\sqrt{10}$, e assim perguntar-lhes-á qual o ponto que tem essa abcissa, prevendo que um deles responda o ponto B. O professor prevê que os alunos já consigam resolver o resto da alínea.

Resolução da alínea 2.2.:

$$A \hookrightarrow \sqrt{2}-5 \qquad C \hookrightarrow -\sqrt{2}+2 \qquad E \hookrightarrow 2\sqrt{2}$$
$$B \hookrightarrow -\sqrt{2} \qquad D \hookrightarrow \sqrt{2} \qquad F \hookrightarrow \sqrt{2}+3$$

Notas quanto à resolução: não se prevê que os alunos apresentem uma resolução com a mesma representação que a exemplificada, mas sim que indiquem as respetivas abcissas na reta apresentada no enunciado.

Prevê-se que alguns alunos tentem obter valores aproximados dos números do conjunto M recorrendo ao cálculo mental. Também se prevê que alguns alunos façam conexões com o trabalho que realizaram acerca da construção de números irracionais na reta real.

Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades em identificar a abcissa do ponto D. Prevê-se que os alunos tenham dificuldades em estabelecer as relações entre os números do conjunto M que são necessárias para a identificação das abcissas dos restantes pontos.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: para apoiar as dificuldades dos alunos, o professor utilizará a estratégia descrita abaixo para corresponder cada número do conjunto M a um dos pontos da reta real e pela ordem estabelecida abaixo.

→ Número $2\sqrt{2}$: o professor perguntará aos alunos que operação está a decorrer entre 2 e $\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda multiplicação. Assim, o professor perguntará aos alunos como se chama a operação em que se multiplica um número por 2, prevendo que um deles responda o dobro. Então, o professor perguntará aos alunos se $2\sqrt{2}$ é duas vezes o $\sqrt{2}$, se conseguem escrever $2\sqrt{2}$ numa soma, prevendo que um deles responda que $2\sqrt{2}$ é igual a $\sqrt{2}+\sqrt{2}$. Assim, o professor perguntará aos alunos onde está $\sqrt{2}$ na reta real, prevendo que um deles responda no ponto D, e depois perguntar-lhes-á se $2\sqrt{2}$ é igual à soma $\sqrt{2}+\sqrt{2}$, e o $\sqrt{2}$ está no ponto D, como se pode obter $2\sqrt{2}$ na reta real, prevendo que um deles responda que o ponto D tem de efetuar uma translação para a direita e que percorra uma distância de $\sqrt{2}$ unidades (não necessariamente nesta linguagem). O professor prevê assim que os alunos concluam que é o ponto E que tem abcissa $2\sqrt{2}$.

→ Número $\sqrt{2}+3$: o professor perguntará aos alunos onde se situa o $\sqrt{2}$ na reta real, prevendo que um deles responda no ponto D. Depois, o professor perguntará aos alunos para onde se deslocará o ponto D se forem adicionadas 3 unidades ao $\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda que se deslocará 3 unidades para a direita. O professor prevê que os alunos contem três unidades para a direita do ponto D, baseando na escala apresentada na reta real, e concluam que é o ponto F que tem abcissa $\sqrt{2}+3$.

→ Número $\sqrt{2}-5$: o professor perguntará aos alunos onde se situa o $\sqrt{2}$ na reta real, prevendo que um deles responda no ponto D. Depois, o professor perguntará aos alunos para onde se deslocará o ponto D se forem subtraídas 5 unidades ao $\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda que se deslocará 5 unidades para a esquerda. O professor prevê que os alunos contem cinco unidades para a direita do ponto D, baseando na escala apresentada na reta real, e concluam que é o ponto A que tem abcissa $\sqrt{2}$ – 5.

→ Número $-\sqrt{2}$: o professor perguntará aos alunos que relação existe entre os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, prevendo que respondam que são simétricos. O professor perguntará depois aos alunos que localizem na reta real o número 1, e depois perguntará o mesmo em relação ao – 1, prevendo que um deles o faça corretamente. Depois de o professor pedir o mesmo em relação aos números 2 e – 2, prevendo que os alunos também o façam corretamente, o professor perguntará aos alunos onde se localiza o número $-\sqrt{2}$, tendo em conta que o $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2, prevendo que um dos alunos responda que está entre – 2 e – 1, e que os alunos concluam que é o ponto B que tem abcissa $-\sqrt{2}$.

→ Número $-\sqrt{2}$ + 2: para apoiar os alunos com dificuldades, o professor utilizará o mesmo método que adotou para o número $\sqrt{2}$ + 3, prevendo que concluam que é o ponto C que tem abcissa $-\sqrt{2}$ + 2.

Resolução da alínea 2.3.:

$A \hookrightarrow -\sqrt{6}$	$C \hookrightarrow -\sqrt{6}+2$	$E \hookrightarrow \sqrt{8}$
$B \hookrightarrow -\sqrt{3}$	$D \hookrightarrow \sqrt{3}$	$F \hookrightarrow 3\sqrt{3}$

Notas quanto à resolução: não se prevê que os alunos apresentem uma resolução com a mesma representação que a exemplificada, mas sim que indiquem as respetivas abcissas na reta apresentada no enunciado.

Prevê-se que alguns alunos tentem obter valores aproximados dos números do conjunto M recorrendo ao cálculo mental. Também se prevê que alguns alunos façam conexões com o trabalho que realizaram acerca da construção de números irracionais na reta real.

Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades em identificar as abcissas dos pontos D e E. Prevê-se que os alunos tenham dificuldades em estabelecer as relações entre os números do conjunto M que são necessárias para a identificação das abcissas dos restantes pontos.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: para apoiar as dificuldades dos alunos, o professor utilizará a estratégia descrita abaixo para corresponder cada número do conjunto M a um dos pontos da reta real e pela ordem estabelecida abaixo.

→ Número $3\sqrt{3}$: o professor perguntará aos alunos que operação está a decorrer entre 3 e $\sqrt{3}$, prevendo que um deles responda multiplicação. Assim, o professor perguntará aos alunos como se chama a operação em que se multiplica um número por 3, prevendo que um deles responda o triplo. Então, o professor perguntará aos alunos se $3\sqrt{3}$ é três vezes o $\sqrt{3}$, se conseguem escrever $3\sqrt{3}$ numa soma, prevendo que um deles responda que

$3\sqrt{3}$ é igual a $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$. Assim, o professor perguntará aos alunos onde está $\sqrt{3}$ na reta real, prevendo que um deles responda no ponto *D*, e depois perguntar-lhes-á se $3\sqrt{3}$ é igual à soma $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$, e o $\sqrt{3}$ está no ponto *D*, como se pode obter $3\sqrt{3}$ na reta real, prevendo que um deles responda que o ponto *D* tem de efetuar uma translação para a direita e que percorra uma distância de $\sqrt{3}$ unidades (não necessariamente nesta linguagem). O professor prevê assim que os alunos concluam que é o ponto *F* que tem abcissa $3\sqrt{3}$.

→ Número $-\sqrt{3}$: o professor perguntará aos alunos que relação existe entre os números $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, prevendo que respondam que são simétricos. O professor perguntará depois aos alunos que localizem na reta real o número 1, e depois perguntará o mesmo em relação ao – 1, prevendo que um deles o faça corretamente. Depois de o professor pedir o mesmo em relação aos números 2 e – 2, prevendo que os alunos também o façam corretamente, o professor perguntará aos alunos onde se localiza o número $-\sqrt{3}$, tendo em conta que o $\sqrt{3}$ está entre 1 e 2, prevendo que um dos alunos responda que está entre – 2 e – 1, e que os alunos concluam que é o ponto *B* que tem abcissa $-\sqrt{3}$.

→ Número $-\sqrt{6}$: o professor perguntará aos alunos se conseguem obter um valor aproximado de $-\sqrt{6}$. Caso não consigam, o professor perguntará aos alunos o resultado de $\sqrt{4}$, prevendo que um deles responda 2, e depois perguntar-lhes-á o resultado de $-\sqrt{4}$, prevendo que um deles responda – 2. O professor repetirá este processo para $\sqrt{9}$ e $-\sqrt{9}$. O professor perguntará depois aos alunos o que podem dizer acerca do resultado de $-\sqrt{6}$, sabendo que $-\sqrt{9}=-3$ e $-\sqrt{4}=-2$, prevendo que um deles responda que $-\sqrt{6}$ é um número entre – 3 e – 2, concluindo assim que é o ponto *A* que tem abcissa $-\sqrt{6}$. O professor adotará este método porque apenas está marcado um ponto na reta real e que está entre os números – 3 e – 2.

→ Número $-\sqrt{6}+2$: o professor perguntará aos alunos onde se situa $-\sqrt{6}$ na reta real, prevendo que um deles responda no ponto *A*. Depois, o professor perguntará aos alunos para onde se deslocará o ponto *A* se forem adicionadas 2 unidades ao $-\sqrt{6}$, prevendo que um deles responda que se deslocará 2 unidades para a direita. O professor prevê que os alunos contem duas unidades para a direita do ponto *A*, baseando na escala apresentada na reta real, e concluam que é o ponto *C* que tem abcissa $-\sqrt{6}+2$.

11h55m - 12h15m

(8) Discussão da tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem* com a turma.

O professor pedirá a um aluno para que vá ao quadro e apresente a sua resolução da alínea 1.1. A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as resoluções dos alunos. Como se previu que a resolução seria única, a seleção do aluno basear-se-á nas dificuldades que tem revelado no seu trabalho nas tarefas envolvendo relações de ordem com números irracionais, assim como o que tem desenvolvido ao longo das aulas aquando da lecionação de números irracionais. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada no quadro, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

O processo de seleção do aluno, de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo para as alíneas 1.2. e 1.3.

O professor projetará no quadro a reta de cada alínea da questão 2 e para cada alínea, o professor pedirá a um aluno que vá ao quadro e identifique as abcissas de cada ponto na respetiva reta. A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as resoluções dos alunos. A seleção do aluno basear-se-á nas dificuldades que tem revelado no seu trabalho nas tarefas envolvendo relações de ordem com números irracionais, assim como o que tem desenvolvido ao longo das aulas aquando da lecionação de números irracionais. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada no quadro ou apresentar dúvidas, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar. Caso surjam outras dúvidas, o professor pedirá para que outros alunos as esclareçam de modo a envolver o máximo número de alunos na discussão. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá.

Para a discussão de qualquer uma das alíneas, o professor invocará respostas erradas ou dúvidas que tenha observado durante o trabalho autónomo dos alunos que possam contribuir para as suas aprendizagens, maximizar os seus conhecimentos acerca dos números irracionais e evitar que cometam erros frequentes no futuro.

NOTAS

Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto, mas caso sobre tempo, serão considerados os seguintes exercícios do 2º volume do manual PI8 para os alunos resolverem:

3 Mostra que $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ é um número inteiro.

6 Mostra que $\sqrt{5}$ é solução da equação $3x^2 - 5x - 15 + 5\sqrt{5} = 0$.

Estes exercícios são escolhidos com o objetivo de rever os conhecimentos dos alunos sobre as operações envolvendo números irracionais.

O número de exercícios a escolher para os alunos dependerá do tempo que restar da aula.

Tendo em conta esta unidade de ensino fazer parte do projeto de estudo, serão entregues duas folhas brancas aos alunos para apresentarem a resolução dos exercícios 3 e 6. O professor informará aos alunos para trabalharem a pares e da hora que terá início a discussão dos exercícios. Uma das folhas contendo a proposta de resolução de cada par dos alunos será recolhida antes da discussão.

Plano de Aula 10

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA PADRE ALBERTO NETO
PLANO DE AULA
ANO LETIVO 2016-2017

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Data e Hora	24 de abril de 2017 das 9h15m às 10h05m	
Tema	Dízimas Infinitas Não Periódicas e Números Reais	
Tópicos, Noções e Conceitos	• Números irracionais e relações de ordem • Números irracionais e a reta real	
Sumário	Resolução de duas fichas de trabalho sobre as relações de ordem envolvendo números irracionais.	
Objetivos Específicos de Aprendizagem	**1.** Saber ordenar números irracionais na forma de raiz quadrada. **2.** Reconhecer que uma raiz quadrada positiva é maior que outra quando o radicando da primeira é maior que o da segunda. **3.** Reconhecer que uma raiz quadrada negativa é maior que outra quando o radicando da primeira é menor que o da segunda.	
Capacidades Transversais	• Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Estabelecimento de conexões	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	• Número racional • Número irracional • Dízimas finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas • Operações com números reais • Relações de ordem com números racionais	
Recursos	**Professor**	Planificação da aula e projetor
	Alunos	Fichas de trabalho e material de escrita
Avaliação	A avaliação das aprendizagens será feita com base na apreciação do trabalho autónomo dos alunos, nomeadamente no seu envolvimento na ficha de trabalho, e no nível da sua participação na discussão da tarefa.	

METODOLOGIA DE TRABALHO
Nesta aula, pretende-se concluir a lecionação das relações de ordem envolvendo números irracionais. Os alunos realizarão uma ficha de trabalho intitulada *Números reais, operações e relações de ordem*. O professor pedirá aos alunos para resolverem a fichas autonomamente a pares e informá-los-á do tempo que têm para a resolver. Em cada mesa serão entregues dois enunciados da tarefa, um dos enunciados contendo a resolução de cada par será entregue ao professor antes da discussão da tarefa no âmbito do estudo em curso. Após o trabalho autónomo, seguir-se-á a sua discussão em grande grupo.

MOMENTOS DA AULA	
(1) Início da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	9h15m - 9h20m
(2) Apresentação da tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem*.	9h20m - 9h25m
(3) Trabalho autónomo dos alunos.	9h25m - 9h45m
(4) Discussão da tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem* com a turma.	9h45m - 10h05m

DESENVOLVIMENTO DA AULA	
(1) Início da aula: entrada dos alunos e escrita da data no quadro.	9h15m - 9h20m
(2) Apresentação da tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem*. Será distribuída uma ficha de trabalho intitulada *Números irracionais, operações e relações de ordem* em que os alunos estudarão as relações de ordem com números na forma de raiz quadrada. Esta tarefa será resolvida sem acesso à calculadora. O professor informará os alunos do tempo para resolver a ficha e também da sua disponibilidade para os apoiar com eventuais dificuldades. O professor escreverá no quadro a hora que terá início a discussão coletiva da tarefa.	9h20m - 9h25m
(3) Trabalho autónomo dos alunos. O professor circulará pela sala observando as resoluções dos alunos de modo a recolher informações acerca das suas estratégias de resolução para o processo de seleção dos alunos que irão ao quadro apresentar uma proposta de resolução. O professor também circulará pela sala de modo a apoiar os alunos, através do questionamento, nas eventuais dificuldades. **Resolução da Questão 1:**	9h25m - 9h45m

1.1. $-\sqrt{24} < -\sqrt{13} < -\sqrt{7} < \sqrt{5} < \sqrt{14} < \sqrt{19}$

1.2. $\sqrt{a}$ é maior que $\sqrt{b}$ quando a é maior que b.

1.3. $-\sqrt{a}$ é maior que $-\sqrt{b}$ quando a é menor que b.

Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades na resolução da alínea 1.1. Prevê-se que os alunos tenham dificuldades nas alíneas 1.2. e 1.3. devido à representação simbólica utilizada no enunciado.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: o professor pedirá aos alunos para que olhem para a resolução que apresentaram na alínea 1.1. e para que indiquem quando é que a raiz quadrada positiva de um número é maior que outra.

Caso os alunos não consigam fazer a conexão entre as duas alíneas, o professor pedirá aos alunos para que indiquem duas raízes quadradas positivas. Prevê-se que um dos alunos escolha duas raízes positivas do conjunto *M*, como por exemplo, $\sqrt{14}$ e $\sqrt{19}$. O professor perguntará então aos alunos qual das raízes é maior, prevendo que um dos alunos responda $\sqrt{19}$. Depois, o professor pedirá aos alunos para que apresentem outras duas raízes quadradas positivas e a seguir perguntar-lhes-á qual é maior, prevendo que um deles o consiga fazer corretamente. Depois, o professor perguntará aos alunos o que notam nos radicandos das duas raízes quadradas positivas quando dizem que uma é maior que a outra. O professor prevê que um dos alunos responda assim que uma raiz quadrada positiva é maior que a outra quando o seu radicando é maior que o da outra. O professor depois perguntará aos alunos quando é que $\sqrt{a}$ é maior que $\sqrt{b}$, prevendo que um dos alunos responda quando a é maior que b.

Caso os alunos mostrem dificuldades na alínea 1.3., o professor repetirá o processo que utilizou na alínea 1.2.

Resolução da Questão 2:

$A \hookrightarrow \sqrt{2}-5$	$C \hookrightarrow -\sqrt{2}+2$	$E \hookrightarrow 2\sqrt{2}$
$B \hookrightarrow -\sqrt{2}$	$D \hookrightarrow \sqrt{2}$	$F \hookrightarrow \sqrt{2}+3$

Notas quanto à resolução: não se prevê que os alunos apresentem uma resolução com a mesma representação que a exemplificada, mas sim que indiquem as respetivas abcissas na reta apresentada no enunciado.

Prevê-se que alguns alunos tentem obter valores aproximados dos números do conjunto *M* recorrendo ao cálculo mental. Também se prevê que alguns alunos façam conexões com o trabalho que realizaram acerca da construção de números irracionais na reta real.

Dificuldades previstas: não se prevê que os alunos tenham dificuldades em identificar a abcissa do ponto *D*. Prevê-se que os alunos tenham dificuldades em estabelecer as relações entre os números do conjunto *M* que são necessárias para a identificação das abcissas dos restantes pontos.

Ação do professor face às dificuldades dos alunos: para apoiar as dificuldades dos alunos, o professor utilizará a estratégia descrita abaixo para corresponder cada número do conjunto *M* a um dos pontos da reta real e pela ordem estabelecida abaixo.

→ Número $2\sqrt{2}$: o professor perguntará aos alunos que operação está a decorrer entre 2 e $\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda multiplicação. Assim, o professor perguntará aos alunos como se chama a operação em que se multiplica um número por 2, prevendo que um deles responda o dobro. Então, o professor perguntará aos alunos se $2\sqrt{2}$ é duas vezes o $\sqrt{2}$, se conseguem escrever $2\sqrt{2}$ numa soma, prevendo que um deles responda que $2\sqrt{2}$ é igual a $\sqrt{2}+\sqrt{2}$. Assim, o professor perguntará aos alunos onde está $\sqrt{2}$ na reta real, prevendo que um deles responda no ponto *D*, e depois perguntar-lhes-á se $2\sqrt{2}$ é igual à soma $\sqrt{2}+\sqrt{2}$, e o $\sqrt{2}$ está no ponto *D*, como se pode obter $2\sqrt{2}$ na reta real, prevendo que um deles responda que o ponto *D* tem de efetuar uma translação para a direita e que percorra uma distância de $\sqrt{2}$ unidades (não necessariamente nesta linguagem). O professor prevê assim que os alunos concluam que é o ponto *E* que tem abcissa $2\sqrt{2}$.

→ Número $\sqrt{2}$ + 3: o professor perguntará aos alunos onde se situa o $\sqrt{2}$ na reta real, prevendo que um deles responda no ponto *D*. Depois, o professor perguntará aos alunos para onde se deslocará o ponto *D* se forem adicionadas 3 unidades ao $\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda que se deslocará 3 unidades para a direita. O professor prevê que os alunos contem três unidades para a direita do ponto *D*, baseando na escala apresentada na reta real, e concluam que é o ponto *F* que tem abcissa $\sqrt{2}$ + 3.

→ Número $\sqrt{2}$ – 5: o professor perguntará aos alunos onde se situa o $\sqrt{2}$ na reta real, prevendo que um deles responda no ponto *D*. Depois, o professor perguntará aos alunos para onde se deslocará o ponto *D* se forem subtraídas 5 unidades ao $\sqrt{2}$, prevendo que um deles responda que se deslocará 5 unidades para a esquerda. O professor prevê que os alunos contem cinco unidades para a direita do ponto *D*, baseando na escala apresentada na reta real, e concluam que é o ponto *A* que tem abcissa $\sqrt{2}$ – 5.

→ Número $-\sqrt{2}$: o professor perguntará aos alunos que relação existe entre os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, prevendo que respondam que são simétricos. O professor perguntará depois aos alunos que localizem na reta real o número 1, e depois perguntará o mesmo em relação ao – 1, prevendo que um deles o faça corretamente. Depois de o professor pedir o mesmo em relação aos números 2 e – 2, prevendo que os alunos também o façam corretamente, o professor perguntará aos alunos onde se localiza o número $-\sqrt{2}$, tendo em conta que o $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2, prevendo que um dos

alunos responda que está entre – 2 e – 1, e que os alunos concluam que é o ponto B que tem abcissa $-\sqrt{2}$. → Número $-\sqrt{2}+2$: para apoiar os alunos com dificuldades, o professor utilizará o mesmo método que adotou para o número $\sqrt{2}+3$, prevendo que concluam que é o ponto C que tem abcissa $-\sqrt{2}+2$. **(4) Discussão da tarefa *Números irracionais, operações e relações de ordem* com a turma.** O professor pedirá a um aluno para que vá ao quadro e apresente a sua resolução da alínea 1.1. A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as resoluções dos alunos. Como se previu que a resolução seria única, a seleção do aluno basear-se-á nas dificuldades que tem revelado no seu trabalho nas tarefas envolvendo relações de ordem com números irracionais, assim como o que tem desenvolvido ao longo das aulas aquando da lecionação de números irracionais. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada no quadro, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar; caso algum aluno apresente dúvidas, o professor perguntará à turma se alguém se oferece para a tirar ao colega. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá. O processo de seleção do aluno, de discussão e de esclarecimento de dúvidas será o mesmo para as alíneas 1.2. e 1.3. O professor projetará no quadro a reta de cada alínea da questão 2 e para cada alínea, o professor pedirá a um aluno que vá ao quadro e identifique as abcissas de cada ponto na respetiva reta. A seleção do aluno é feita com base no seguinte processo: o professor tinha circulado no momento da aula anterior e observado as resoluções dos alunos. A seleção do aluno basear-se-á nas dificuldades que tem revelado no seu trabalho nas tarefas envolvendo relações de ordem com números irracionais, assim como o que tem desenvolvido ao longo das aulas aquando da lecionação de números irracionais. Após o aluno apresentar a sua resposta, o professor perguntará aos restantes alunos se concordam com o que foi feito no quadro pelo colega ou se têm alguma dúvida. Caso um aluno discorde da resposta apresentada no quadro ou apresentar dúvidas, o professor pedirá ao aluno que a apresentou para a explicar. Caso surjam outras dúvidas, o professor pedirá para que outros alunos as esclareçam de modo a envolver o máximo número de alunos na discussão. Se nalguma das situações o aluno não ficar esclarecido com a explicação de um colega, o professor intervirá. Para a discussão de qualquer uma das alíneas, o professor invocará respostas erradas ou dúvidas que tenha observado durante o trabalho autónomo dos alunos que possam contribuir para as suas aprendizagens,	9h45m - 10h05m

maximizar os seus conhecimentos acerca dos números irracionais e evitar que cometam erros frequentes no futuro.	

NOTAS
Prevê-se que os objetivos da aula sejam cumpridos dentro do tempo previsto, mas caso sobre tempo, serão considerados os seguintes exercícios do 2º volume do manual PI8 para os alunos resolverem: 3 Mostra que $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ é um número inteiro. 6 Mostra que $\sqrt{5}$ é solução da equação $3x^2-5x-15+5\sqrt{5}=0$. Estes exercícios são escolhidos com o objetivo de rever os conhecimentos dos alunos sobre as operações envolvendo números irracionais. O número de exercícios a escolher para os alunos dependerá do tempo que restar da aula. Tendo em conta esta unidade de ensino fazer parte do projeto de estudo, serão entregues duas folhas brancas aos alunos para apresentarem a resolução dos exercícios 3 e 6. O professor informará aos alunos para trabalharem a pares e da hora que terá início a discussão dos exercícios. Uma das folhas contendo a proposta de resolução de cada par dos alunos será recolhida antes da discussão.

Anexo 3 – Tarefas

TAREFA 1

Ficha de Trabalho

Nome: ___________________________________ Data: _________________

Tarefa	*Números e dízimas*
Material necessário	Caneta
Método de Trabalho	Trabalho a pares

Recorda:

Um número **racional** é um número que pode ser escrito na forma de razão entre dois números inteiros. Pode ser representado por dízimas finitas ou infinitas periódicas.

1. Considera o número $\frac{13}{19}$.

1.1. Será que este número se pode representar por uma dízima finita? Justifica a tua resposta.

1.2. Recorrendo à calculadora, indica um valor aproximado para $\frac{13}{19}$.

Será que este número é representado por uma dízima infinita periódica? Justifica a tua resposta.

2. Considera a seguinte dízima infinita:

$$0{,}121221222122221\ldots$$

2.1. Acrescenta-lhe casas decimais até que o número apresentado tenha seis algarismos 1.

2.2. Será esta dízima periódica? Justifica a tua resposta.

3. Dá exemplos de dois números representados na forma de dízima que não sejam números racionais, justificando a tua escolha.

4. Faz um esquema que resuma os tipos de dízima que estudaste.

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

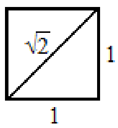
TAREFA 2

Ficha de Trabalho

Nome: ___________________________________ Data: _________________

Tarefa	*Novos números e um novo conjunto*
Material necessário	Caneta
Método de Trabalho	Trabalho a pares

Nota Histórica 1: o número $\sqrt{2}$



Num quadrado de lado 1, a medida da sua diagonal é $\sqrt{2}$

Os pitagóricos tentaram escrever $\sqrt{2}$ na forma de uma fração, mas após várias tentativas sem sucesso, acabaram por provar que tal não era possível. Daí em adiante, qualquer número que não se possa escrever na forma de fração passou a chamar-se **irracional**. Hoje em dia, graças aos computadores conseguem-se obter facilmente valores aproximados do número $\sqrt{2}$. Por exemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095048801688724209698078569671\ \ldots$$

Da mesma forma se pode provar que **a raiz quadrada de qualquer número inteiro, que não seja um quadrado perfeito, é uma dízima infinita não periódica.**

1. Considera a seguinte sequência de números:

$$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \ldots$$

1.1. Quais destes números são racionais? Justifica a tua resposta.

1.2. Consegues estabelecer uma regra para decidir se a raiz quadrada de um número natural é um número racional?

> **Nota Histórica 2: o conjunto $\mathbb{R}$**
> No século XVII, Descartes apresentou o número real e nasceu depois o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como o conjunto que reúne os números racionais e os números irracionais.

2.

2.1. Indica se as afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando as falsas.

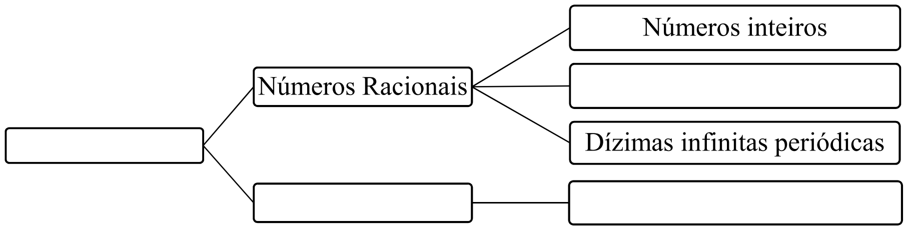
a) Todo o número natural é racional.

b) Todo o número racional é inteiro.

c) Toda a dízima é um número racional.

d) Todo o número real é racional.

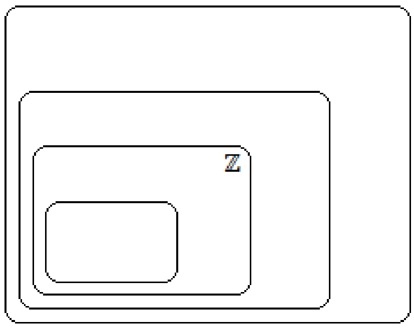
2.2. Completa o seguinte esquema:



3. A figura ao lado representa os conjuntos de números e a forma como estão relacionados.

3.1. Completa o esquema, identificando cada retângulo com as letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

3.2. Insere os números apresentados abaixo nos respetivos conjuntos:



$0 \qquad \sqrt{15} \qquad -5 \qquad 0{,}6 \qquad \pi \qquad \sqrt{9} \qquad -2{,}(45) \qquad -\sqrt{\frac{1}{4}} \qquad \frac{28}{7}$

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

TAREFA 3

Ficha de Trabalho

oito

Nome: ______________________________ Data: _______________

Tarefa	*Os números reais*
Material necessário	Caneta
Método de Trabalho	Trabalho a pares

Numa aula de Matemática, o professor pediu aos alunos para preencherem uma tabela, identificando a que conjunto pertencem os seguintes números:

$$\left\{\frac{\sqrt{36}}{3}\,;\sqrt{5}\,;-\frac{800}{100}\,;12{,}68(9)\,;\sqrt{\frac{1}{16}}\right\}$$

O professor verificou que as tabelas do Carlos e da Filipa apresentavam algumas incorreções. Consegues descobrir quais foram os seus erros? Justifica a tua resposta.

Tabela do Carlos

	$\frac{\sqrt{36}}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\frac{800}{100}$	12,68(9)	$\sqrt{\frac{1}{16}}$
$\mathbb{N}$					
$\mathbb{Z}$			X		
$\mathbb{Q}$	X			X	X
$\mathbb{R}$	X	X	X	X	X

Tabela da Filipa

	$\frac{\sqrt{36}}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\frac{800}{100}$	12,68(9)	$\sqrt{\frac{1}{16}}$
$\mathbb{N}$	X				
$\mathbb{Z}$	X		X		
$\mathbb{Q}$	X	X	X		
$\mathbb{R}$	X	X	X	X	X

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

TAREFA 4

Ficha de Trabalho

oito

Nome: ______________________________ Data: _______________

Tarefa	*Números reais e conjuntos*
Material necessário	Caneta
Método de Trabalho	Trabalho a pares

1. Completa corretamente os espaços, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$ de modo a obter afirmações verdadeiras.

5 ____ $\mathbb{Z}$ $\qquad \frac{2}{3}$ ____ $\mathbb{R}$ $\qquad \sqrt{11}$ ____ $\mathbb{Q}$

5 ____ $\mathbb{R}$ $\qquad \frac{2}{3}$ ____ $\mathbb{Q}$ $\qquad \sqrt{11}$ ____ $\mathbb{R}$

$-\sqrt{16}$ ____ $\mathbb{N}$ $\qquad -5,(89)$ ____ $\mathbb{Q}$ $\qquad 1,3(5)$ ____ $\mathbb{Z}$

$-\sqrt{16}$ ____ $\mathbb{Z}$ $\qquad -5,(89)$ ____ $\mathbb{R}$ $\qquad 1,3(5)$ ____ $\mathbb{Q}$

2. Completa corretamente os espaços, utilizando os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$ de modo a obter afirmações verdadeiras.

$\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{Q}$ $\qquad \mathbb{Z}$ ___ $\mathbb{N}$ $\qquad \mathbb{Q}$ ___ $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ ___ $\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{Q}$ ___ $\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}$ ___ $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{Z}$ ___ $\mathbb{Q}$ ___ $\mathbb{R}$

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

TAREFA 5

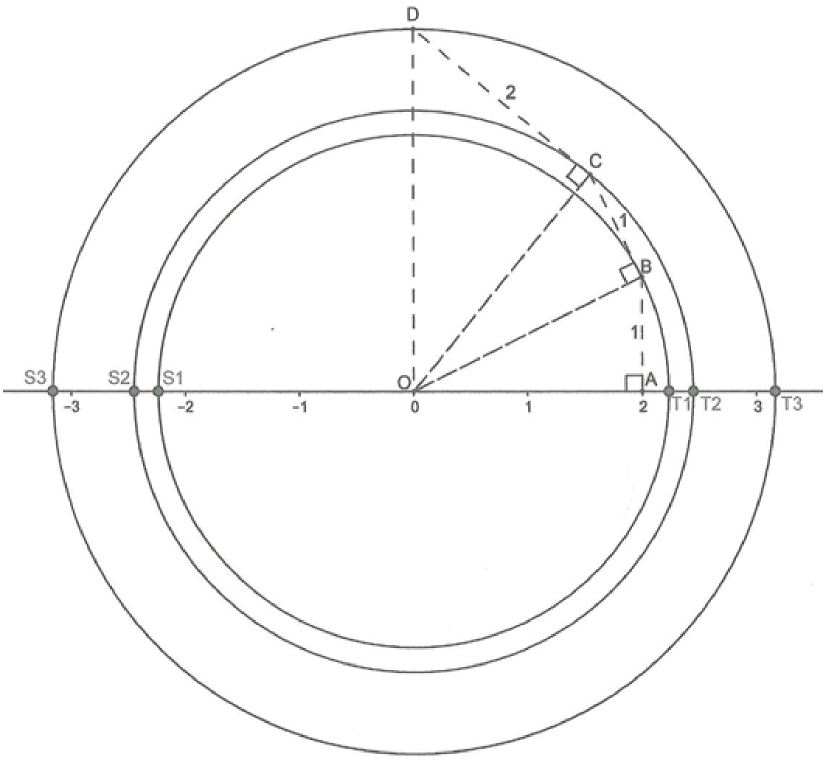
Ficha de Trabalho

oito

Nome: ______________________________ Data: _______________

Tarefa	*Números irracionais e a reta real*
Material necessário	Caneta
Método de Trabalho	Trabalho a pares

Nesta figura, os pontos *B*, *C* e *D* estão sobre uma circunferência.



a) Determina o valor exato do raio de cada circunferência.

b) O que podes dizer sobre as abcissas dos pontos T1, T2 e T3?

c) Indica as abcissas dos pontos S1, S2 e S3, justificando a tua resposta.

d) Completa a seguinte tabela.

Ponto	**Cateto Maior**	**Cateto Menor**	**Hipotenusa**	**Abcissa do Ponto**
T1	2	1	$\sqrt{5}$	
…	…	…	…	…
T2				
…	…	…	…	…
T3				
…	…	…	…	…
T4	3	2		
…	…	…	…	…
T5		1	$\sqrt{17}$	

e) Comenta a seguinte frase: *"Entre dois números irracionais existem infinitos números racionais."*

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

TAREFA 6

Ficha de Trabalho

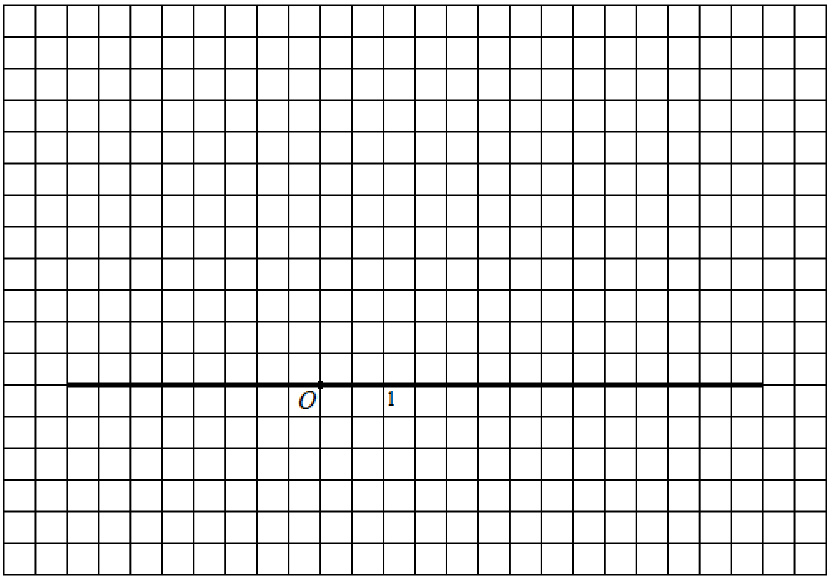
oito

Nome: ______________________ Data: ____________

Tarefa	*Construindo números irracionais na reta real*
Material necessário	Lápis, régua e compasso
Método de Trabalho	Trabalho a pares

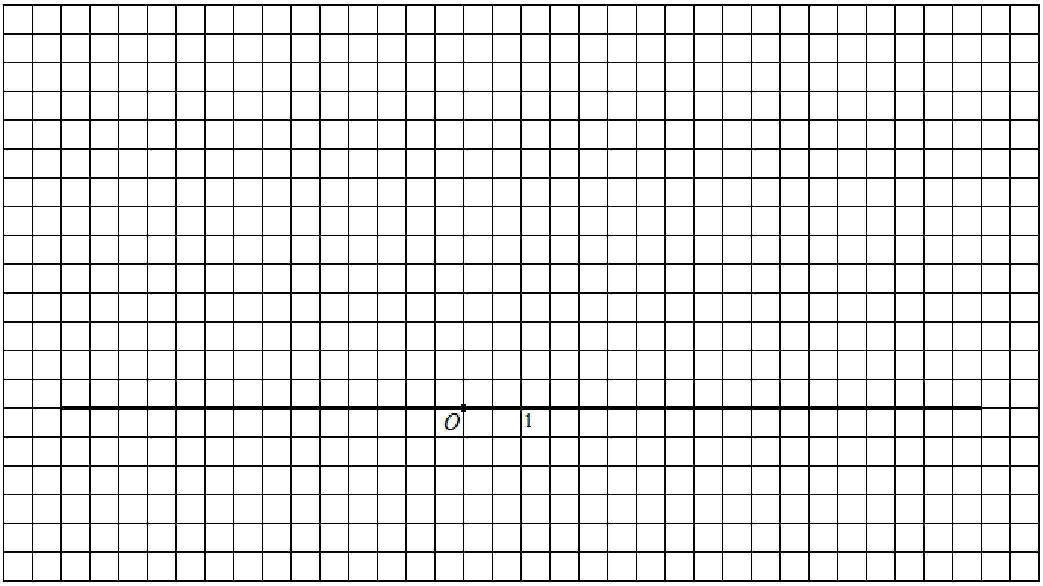
Recordando o trabalho realizado na tarefa *Números irracionais e a reta real*, resolve as alíneas apresentadas abaixo.

a) Representa na reta real o número $\sqrt{13}$.



a1) Será que o triângulo que usaste na alínea anterior para representar $\sqrt{13}$ na reta real é o único que poderias usar? Justifica a tua resposta.

b) Representa na reta real o número $\sqrt{29}$.



b1) Representa na folha quadriculada da alínea **b)** os seguintes números:

b11) $-\sqrt{29}$

b12) $2+\sqrt{29}$

b13) $-4+\sqrt{29}$

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

TAREFA 7

Ficha de Trabalho

Nome: ________________________________ Data: _______________

Tarefa	*Operações com números irracionais*
Material necessário	Caneta
Método de Trabalho	Trabalho a pares

A aprendizagem dos números irracionais, pertencentes ao novo conjunto $\mathbb{R}$, traz novos desafios: operar com números irracionais.

1. Observa o resultado das seguintes operações:

$2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

$6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

$3\sqrt{6}-7\sqrt{6}=-4\sqrt{6}$

Completa os seguintes espaços:

$10\sqrt{5}-4\sqrt{5}=$ _______

$2\sqrt{11}-6\sqrt{11}+8\sqrt{11}=$ _______

2. Observa a seguinte igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$

Podes concluir que para quaisquer números não negativos *a* e *b*, $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$?

Justifica a tua resposta.

3. Observa o resultado das seguintes operações:

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

$\sqrt{6}\div\sqrt{2}=\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$

$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}$

Completa os seguintes espaços:

$\sqrt{3}\times\sqrt{11}=$ _______

$\sqrt{15}\div\sqrt{3}=$ _______

$\sqrt{2}\times\sqrt{5}=$ _______

$(\sqrt{10}\div\sqrt{2})\times\sqrt{6}=$ _______

4. Sem recorrer à calculadora, diz se concordas com a resolução seguinte, justificando a tua resposta:

$$5\times\sqrt{6}=\sqrt{30}$$

5. Escreve as seguintes potências na forma de um produto e calcula os seus resultados.

$(\sqrt{6})^2=$

$(2\sqrt{3})^2=$

$(-3\sqrt{6})^2=$

Com base no trabalho que realizaste nas questões anteriores, o que podes concluir sobre os resultados das seguintes operações?

$a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=$	$(\sqrt{a})^2=$
$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$

TAREFA 8

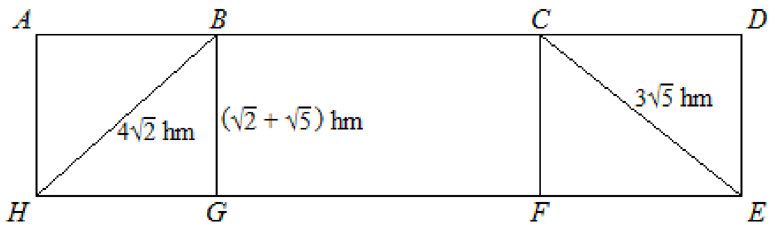
Ficha de Trabalho

oito

Nome: ______________________________ Data: _______________

Tarefa	*Números irracionais: operações e comparações*
Material necessário	Caneta
Método de Trabalho	Trabalho a pares

Num estádio há três campos desportivos de forma retangular.



No retângulo [*BCFG*], o comprimento é igual ao dobro da largura.

a) O Tomás é atleta e no treino correu o seguinte percurso: $H \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E$
Determina o valor exato em hm da distância percorrida pelo Tomás.

b) O Lourenço também é atleta e correu o seguinte percurso: $H \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow C$
Descobre qual dos dois atletas correu mais e determina o valor exato em hm da diferença entre as distâncias percorridas.

c) Calcula o valor exato em hm² da área do campo [*BCFG*].

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

TAREFA 9

Ficha de Trabalho

oito

Nome: ______________________________ Data: _______________

Tarefa	*Números irracionais e relações de ordem*
Material necessário	Caneta e calculadora
Método de Trabalho	Trabalho a pares

1. Indica se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas, justificando as que são falsas.

a) 2,5 é maior que 2,4(8)

b) 14,5 é igual a 14,(50)

c) – 6,255 é menor que – 6,(256)

d) 0,1212212221… é maior que 0,12(122)

e) 0,138567… é igual a 0,138567…

2. Considera os dois exemplos, apresentados na tabela, para enquadrar o número π. Com base nesses exemplos, completa os espaços.

Número	Enquadramento 1	Enquadramento 2
π	$3{,}1 < \pi < 3{,}2$	$3{,}14 < \pi < 3{,}15$
$\sqrt{5}$		
$1-2\sqrt{3}$		

3. Indica dois números racionais e dois números irracionais que estejam compreendidos entre:

a) 4 e $\sqrt{28}$

b) 5 e 6

c) $-\sqrt{15}$ e 2π

4. Com base no trabalho que realizaste nas questões anteriores, indica se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas. Justifica a tua resposta.

a) *Entre dois números racionais existem infinitos números irracionais.*

b) *Entre dois números irracionais existe apenas um número irracional.*

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

TAREFA 10

Ficha de Trabalho

Nome: ___________________________________ Data: _________________

Tarefa	*Números irracionais, operações e relações de ordem*
Material necessário	Caneta
Método de Trabalho	Trabalho a pares

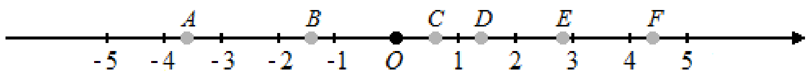
1. Considera o conjunto $A = \{-\sqrt{7}, -\sqrt{24}, \sqrt{5}, \sqrt{19}, -\sqrt{13}, \sqrt{14}\}$

1.1. Coloca os números do conjunto A por ordem crescente.

1.2. Se tiveres dois números $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ (a e b são números não negativos), quando é que o primeiro é maior que o segundo?

1.3. Se tiveres dois números $-\sqrt{a}$ e $-\sqrt{b}$ (a e b são números não negativos), quando é que o primeiro é maior que o segundo?

2. Faz uma correspondência entre cada um dos pontos A, B, C, D, E e F da reta real e cada um dos números do conjunto $M = \{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}+3, -\sqrt{2}+2, \sqrt{2}-5\}$



Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Anexo 4 – Minitestes

MINITESTE 1

MINITESTE

Nome: ________________________________ Data: ________________

1. Considerem o conjunto $A = \left\{-\sqrt{11}; \sqrt{0{,}01}; \frac{40}{2}; -\sqrt{81}; 6,(13); \frac{\sqrt{16}}{5}\right\}$.

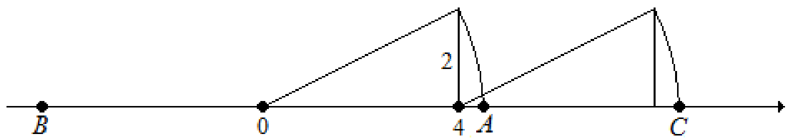
Indiquem os números do conjunto *A* que:

a) Pertencem a $\mathbb{Z}$. ____
(2/20)

b) Pertencem a $\mathbb{Q}$, mas não pertencem a $\mathbb{N}$. ______________________________
(4/20)

c) Pertencem a $\mathbb{R}$, mas não pertencem a $\mathbb{Q}$. _____________________________
(4/20)

2. Na reta real representada abaixo, os pontos *A* e *B* estão à mesma distância da origem.



Os dois triângulos representados na reta real também são iguais.

Determinem a abcissa do ponto:

a) *A*
(5/20)

b) *B*
(2/20)

c) *C*
(3/20)

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

MINITESTE 2

MINITESTE

Nome: ________________________________ Data: ________________

1. Completem os espaços com > ou < de modo a obter afirmações verdadeiras.
(4/20)

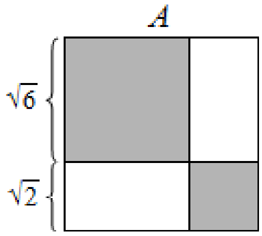
a) $-0{,}45$ ___ $-0,(45)$

b) $8,(365)$ ___ $8{,}3654\ldots$

2. Considerem o conjunto $A = \{-\sqrt{5}; -\sqrt{5}+1; \sqrt{10}; \sqrt{10}-2; \sqrt{10}+3\}$.

Coloquem os números do conjunto *A* por ordem decrescente.
(4/20)

3. Considerem o quadrado A da figura dividido em dois quadrados cinzentos e dois retângulos brancos.



a) Comentem a afirmação do Mateus: *O perímetro da zona cinzenta é igual ao perímetro da zona branca.*
(7/20)

b) Indiquem, justificando, se concordam com a forma como o Rui calculou a área do quadrado *A*:
(5/20)

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) = 6+2 = 8$$

Tiago Borges – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa